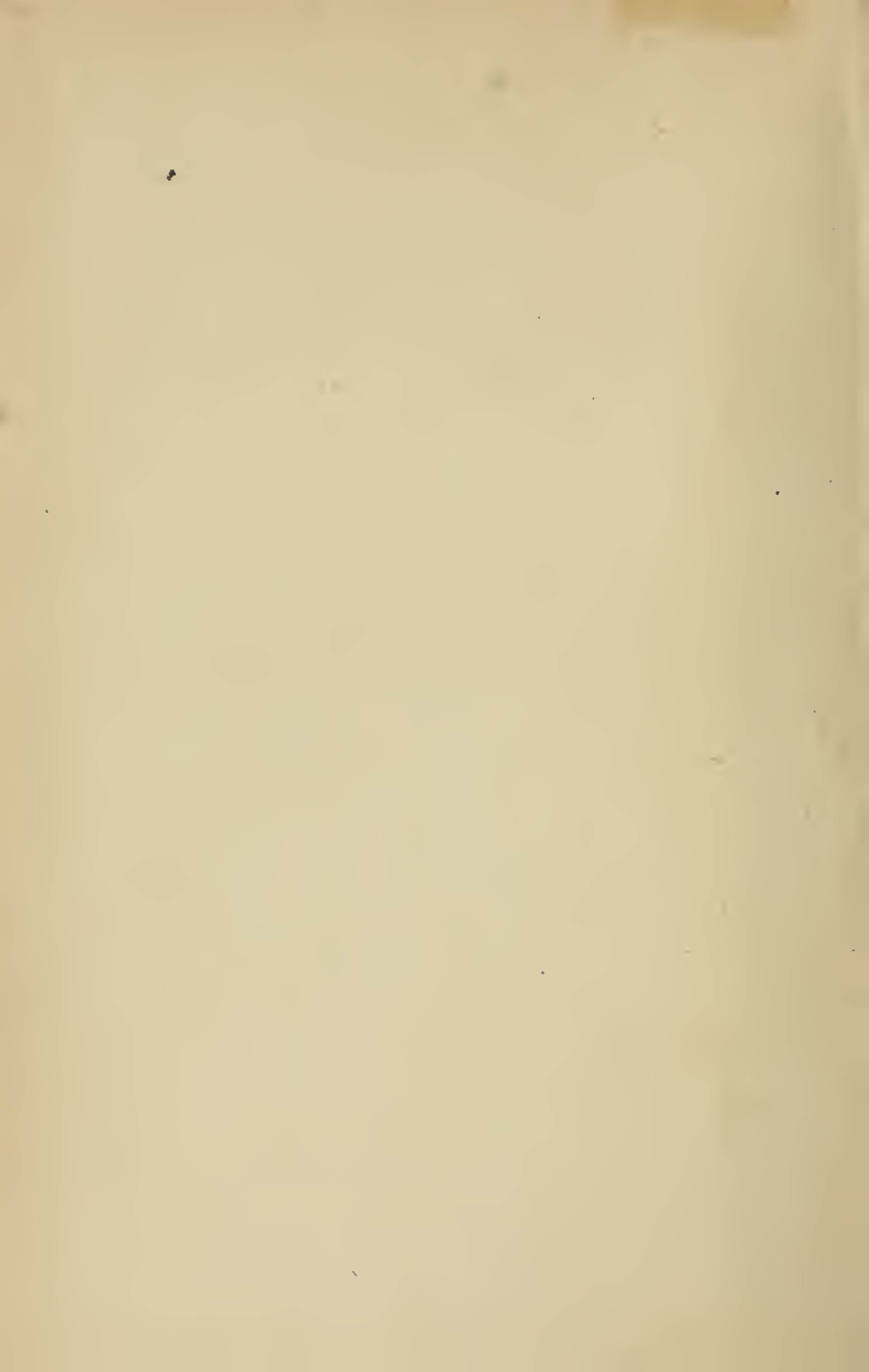
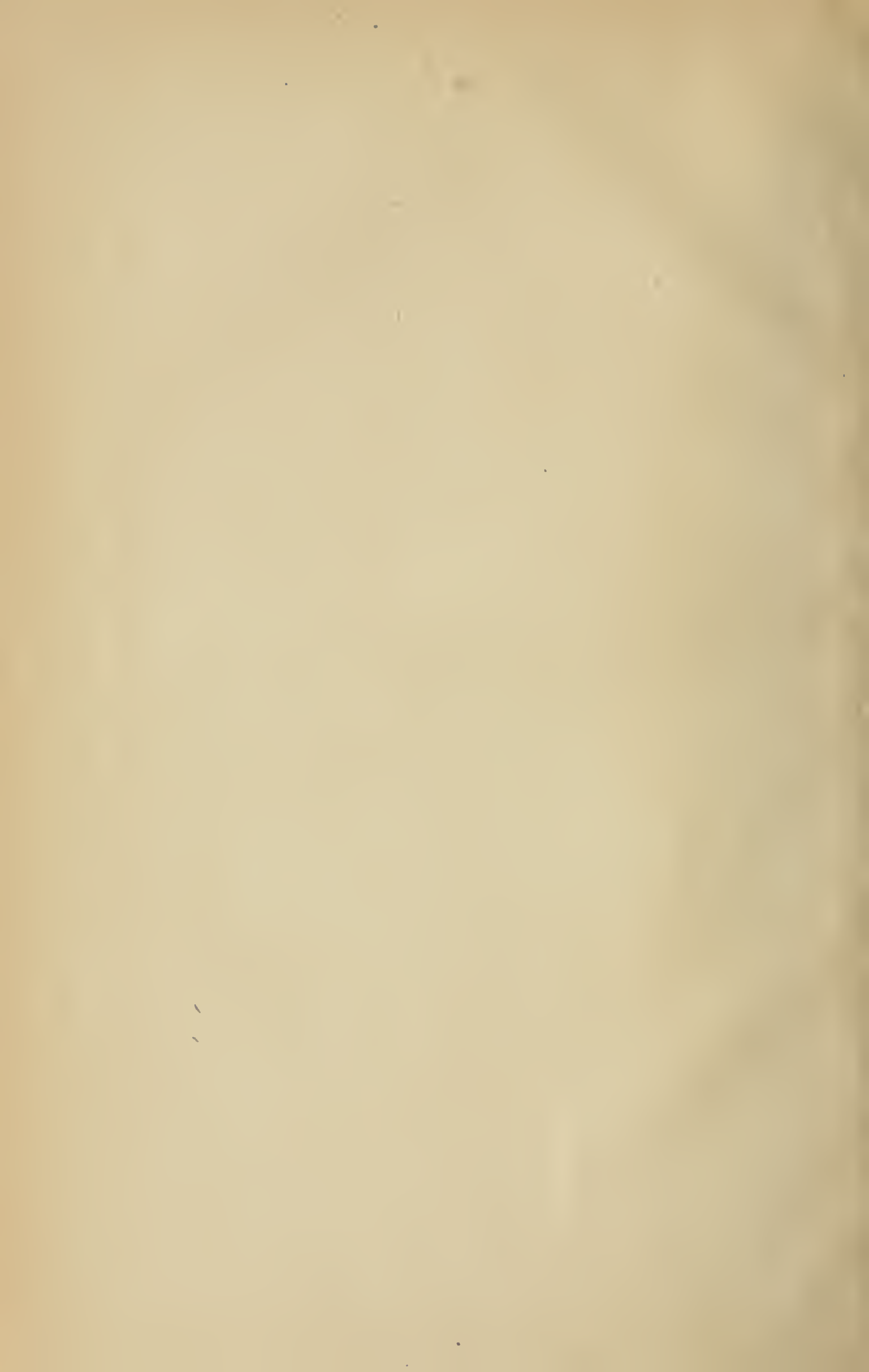

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00477810 6


UNIV.
OF TORONTO
LIBRARY













Lehrbuch

der

Arithmetik

zum

Gebrauch an niedern und höhern Lehranstalten

und beim

Selbststudium

von

B. E. Richard Schurig.

In drei Teilen.

1. Teil: **Spezielle Zahlenlehre** (Zifferrechnen).
2. Teil: **Allgemeine Zahlenlehre** (Buchstabenrechnen).
3. Teil: **Algebra nebst Anwendung auf die Analysis.**

Leipzig.

Verlag von Friedrich Brandstetter.

1883.

Lehrbuch

der

Arithmetik

zum

Gebrauch an niedern und höhern Lehranstalten

und beim

Selbststudium

von

B. E. Richard Schurig.

Erster Teil:

Spezielle Zahlenlehre.

(Zugleich ein Handbuch für Volksschullehrer.)

Leipzig.

Verlag von Friedrich Brandstetter.

1883.

Vorwort.

Der Grundgedanke zu dem vorliegenden Buche entsprang der durch langjährige Erfahrungen und Untersuchungen bei mir gewonnenen Überzeugung, dafs die Lehren der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, noch immer einer wahrhaft logischen Begründung, einer planmäfsigen Anordnung und einer für das stetige gesicherte Fortschreiten des Lernenden durchaus geeigneten Darstellung ermangeln.

Ob der, zur Abhilfe solchen Mangels von mir unternommene Versuch seinen Zweck in der That erfüllen werde, mufs ich der sachverständigen Beurteilung anheimstellen, vornehmlich aber von dem bei ernstlich gewollter Anwendung meines Versuches zu erreichenden Erfolge abhängig machen.

In gleichem Sinne mag es die Zeit lehren, ob das nicht minder wichtige, von mir ins Auge gefafste Ziel erreichbar sei, dafs nämlich meine eigenartige Entwickelung der mathematischen Lehren sich für die erfolgreiche Benutzung seitens praktischer Lehrer eigne und bei dem Unterricht in den Händen der Schüler von Gymnasien und Realschulen auf die Dauer bewähre.

In meiner langjährigen Praxis als Lehrer der mathematischen Wissenschaften habe ich allerdings ausreichende Gelegenheit gehabt, die Mehrzahl jetzt üblicher Unterrichtsmethoden in der von mir gelehrten Wissenschaft näher kennen zu lernen. Hiernach tritt vorerst leider die Besorgnis an mich heran, dafs mein Buch für den Anfang von mehrfacher Seite mit einem gewissen Mifstrauen, wie es einer ganz andersartigen Gewohnheit in der Unterrichtsweise nur zu nahe liegt, aufgenommen werden mag, ein Mifstrauen, welches in der Regel nur durch einen besondern äufsern Anstofs verscheucht werden kann.

Bei alledem belebt mich doch die feste Zuversicht, dafs die von mir eingeführte methodische Vereinfachung des Lehrgebäudes und dessen Zurückführung auf möglichst wenige, in strenger Folge logisch fortentwickelte Sätze sich über kurz oder lang weitere

Bahn brechen und, woran mir als praktischem Lehrer noch mehr liegt, auch allgemeinere Einführung in den mathematischen Lehrkursus finden werde.

Für die natürlichen Grenzen, welche ein Lehrbuch als solches einzuhalten hat, schickt es sich natürlich nicht, eine von dem gewöhnlichen Unterrichtswege abweichende Auffassung mit besonderen philosophischen oder pädagogischen Darlegungen polemischer Färbung ausdrücklich zu begleiten. Es galt vielmehr für mich, zunächst ein in sich geschlossenes Lehrgebäude aufzubauen und meine vielfach neue Methode durch ihre ganze Ausgestaltung für sich selbst sprechen zu lassen.

Nur in sehr wenigen Fällen (z. B. §. 13, 18. Anmerk., S. 37) habe ich durch Mitteilung der Gründe für meine abweichende Auffassung einer unliebsamen Kritik vorgebeugt. Denn es sollte immer schon die strenge, direkte Beweisführung eine falsche Beurteilung verhindern. Keineswegs verkenne ich, dafs die streng logische Methode, wie sie mein Buch anstrebt, nicht für den ersten Anfang im Rechenunterricht sich eigne, aber sie soll dem Elementarlehrer bekannt sein, damit er Unlogisches thunlichst vermeiden und das Logische nach und nach in der jugendlichen Anschauung entwickeln kann.

So soll z. B. beim ersten Unterricht im Rechnen der Begriff 0 (Null) nicht im Sinne des §. 18 (S. 60 unten), sondern in der früheren kindlichen Auffassung (§. 9, 6, S. 12) gelehrt werden. Erst der reifere Verstand wird einsehen, dafs 0 in der eigentlichen Mathematik nicht das „absolute Nichts“ sein kann, und dafs es auch nicht blofs deshalb das „Unendlichkleine“ ist, weil es die höhere Mathematik so will, oder weil $\frac{1}{0}$ in jener Auffassung nicht $= \infty$, sondern ein Unding wäre.

Mit vorstehenden Worten will ich mich durchaus nicht rühmen, etwas Unfehlbares gegeben zu haben, im Gegenteil fühle ich, dafs auch in der mathematischen Logik stets noch ein Fortschritt, insbesondere eine noch einfachere und strengere Begründung mancher Sätze möglich sein wird.

Leipzig, Juli 1883.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

§. 1. Grundbegriffe 1
§. 2. Die Axiome 4
§. 3. Die ersten Lehrsätze 4
§. 4. Arten der Gröfsen. Einteilung der Mathematik 5
§. 5. Arithmetik. Einteilung der Gleichungen und der Arithmetik . . . 5
Die 7 Species (§. 6 — §. 17) 6
§. 6. Addition 6
§. 7. Additionssätze 7
§. 8. Subtraktion 9
§. 9. Subtraktionssätze 10
§. 10. Multiplication 17
§. 11. Multiplicationssätze 19
§. 12. Division 26
§. 13. Divisionssätze 27
Partialdivision 47
§. 14. Potenzieren 51
§. 15. Potenzsätze 53
§. 16. Radicieren 54
§. 17. Logarithmieren 56
§. 18. Endliche und unendliche Gröfsen. Null 59
§. 19. Das Zehnersystem 64
§. 20. Das Rechnen mit ganzen (Decimal-) Zahlen 66
§. 21. Andere Zahlensysteme 70
§. 22. Vielfaches. Mafs. Arten der Zahlen 72
§. 23. Einige Eigenschaften der Zahlen. Allgemeine Sätze der Teilbarkeit . 77
Kettendivision 80
§. 24. Teilbarkeit bestimmter Zahlen 85
§ 25. Zerlegen einer Zahl in Faktoren 96
§. 26. Das Aufsuchen des grössten gemeinsamen Mafses 99
§. 27. Das Aufsuchen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen 101
§. 28. Vorteile beim Rechnen mit ganzen Zahlen 103
Addition 105
Subtraktion 107
Multiplication 109
Division 122
§. 29. Neunerprobe 122
§. 30. Elferprobe 139

Seite
§. 31. Gemeine Brüche 142
§. 32. Formänderungen der Brüche 144
§. 33. Addition mit Brüchen 149
§. 34. Subtraktion mit Brüchen 151
§. 35. Multiplication mit Brüchen 153
§. 36. Division mit Brüchen 161
§. 37. Vereinfachen der Doppelbrüche 165
§. 38. Decimalbrüche 166
§. 39. Addition mit Decimalbrüchen 170
§. 40. Abbrechen der Decimalbrüche 170
§. 41. Subtraktion mit Decimalbrüchen 172
§. 42. Multiplication mit Decimalbrüchen 173
§. 43. Division mit Decimalbrüchen 176
§. 44. Verwandeln der gemeinen Brüche in Decimalbrüche 184
§. 45. Verwandeln der Decimalbrüche in gemeine Brüche 201
§. 46. Das Rechnen mit abgebrochenen und unvollständigen Decimalbrüchen 208
§. 47. Decimalbrüche in Verbindung mit gemeinen Brüchen 212
§. 48. Teilbrüche 215
§. 49. Angewandte Zahlen 222
§. 50. Proportionalität 233
Lösungen von Aufgaben durch Reduktion auf die Einheit 234
Teilung nach gegebenen Verhältniszahlen (Gesellschaftsrechnung) . 239
Mischungsaufgaben 243
Prozentrechnungen 245
Zinsrechnung 248
Discontorechnung 253
Terminrechnung 255
Zinseszinsrechnung 259
Kettenrechnung 263
Regula falsi 268
Auflösen durch Rückwärtsschreiten 270
§. 51. Von den entgegengesetzten Gröfsen. (Positive und negative Gröfsen) 271

NB. Ungeachtet der auf einen korrekten Druck dieses Buches verwendeten grofsen Sorgfalt ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dafs doch hie und da ein Druckfehler unberichtigt geblieben ist. Die Verlagshandlung würde es daher mit lebhaftem Danke anerkennen, von den verehrlichen Interessenten des Werkes gegebenenfalls auf solche Fehler aufmerksam gemacht zu werden!

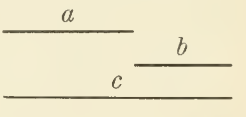
§. 1. Grundbegriffe.

1. Gröfse ist ein einfacher Begriff, also ein Begriff, der seiner Ursprünglichkeit wegen nicht erklärt (definiert), d. h. auf einen noch einfacheren, übergeordneten (oder Gattungs-) Begriff zurückgeführt werden kann.

2. Gleich sind Gröfsen, wenn für die eine die andere gesetzt werden kann, ohne eine Änderung des Wertes zu bewirken. [Beispiel: $2 + 1$ und 3 sind gleich.]

3. Gleichung ist das Urteil, dafs eine Gröfse einer andern gleich sei. Die Form der Gleichung ist: $A = B$, lies „A gleich B". [Beispiel: $2 + 1 = 3$]. In der Gleichung unterscheidet man die „linke Seite": links vom Gleichheitszeichen (=) und die „rechte Seite": rechts vom Gleichheitszeichen.

4. Addieren heifst eine Gröfse suchen, die eben so grofs ist, als mehrere andere gegebene Gröfsen zusammengenommen. [Allgemein-mathematische Erklärung.] Die gegebenen, zu addierenden Gröfsen heifsen Summanden, die gesuchte Gröfse: Summe. Es seien z. B. a und b die Gröfsen (Linien), welche addiert werden sollen, also die Summanden. Sucht man eine Gröfse (Linie) c, welche eben so grofs als a und b zusammen sein soll, so ist c die Summe. Man schreibt $a + b = c$, gelesen: „a plus b gleich c".



5. Folgerung: Die Summe ist so grofs als die Summanden zusammen genommen.

6. Eine Gröfse ist gröfser als eine zweite, wenn zu letzterer etwas addiert werden mufs, um die erste zu erhalten. Zugleich ist alsdann die zweite Gröfse kleiner als die erste. So ist z. B. die Linie c (s. 4. Satz) gröfser als die Linie a und a kleiner als c, weil zu a: b addiert werden mufs, um c zu erhalten. Man schreibt $c > a$, gelesen: „c ist gröfser als a", und $a < c$, gelesen: „a ist kleiner als c". [Beispiele: $3 > 1$, $2 < 3$.]

Ist also $A > B$, so ist zugleich $B < A$. [Ist z. B. $3 > 1$, so ist zugleich $1 < 3$.]

Die Formen $A > B$, $B < A$ (z. B. $7 > 3$, $2 < 8$) nennt man Ungleichungen.

7. Aus dem 4. Satz folgt nun:

I. Die Summe ist gröfser als jeder Summand.

II. Jeder Summand ist kleiner als die Summe.

8. Denkt man sich eine gegebene Gröfse als Summe, um in derselben Summanden zu unterscheiden, so nennt man jene gegebene Gröfse: Ganzes, die Summanden: Teile (dieses Ganzen). Ist z. B. c (s. 4. Satz) gegeben und sind a und b nicht ursprünglich vorhanden, sondern erst in zweiter Linie gedacht, so ist c Ganzes, a und b die Teile desselben. Man sagt auch: c ist in a und b zerlegt worden. Denkt man sich den Ausdruck $a+b$ als gegebene Gröfse, so ist $a+b$ Ganzes, a oder b ein „Teil" oder „Glied" dieses Ganzen. Man sagt daher: $a+b$ ist ein zweiteiliger oder zweigliederiger Ausdruck.

9. Die Sätze 5 und 7 gehen nun über in die folgenden:

I. Das Ganze ist den Teilen zusammengenommen gleich.

II. Das Ganze ist gröfser als jeder Teil.

III. Jeder Teil ist kleiner als das Ganze.

10. Einheit ist ein einfacher, also undefinierbarer Begriff.

11. Die Einheiten sind unter sich getrennt vorhanden. Verbindet man eine gewisse Menge von Einheiten zu einem Begriff, so entsteht die Zahl. Zahl ist mithin die Summe der vorhandenen Einheiten.

„Eins" ist die aus einer Einheit bestehende abstrakte Zahl, bei welcher man also auf die Art der Einheiten nicht Rücksicht nimmt. Nimmt man zu Eins noch eine Einheit hinzu und vereinigt diese Einheiten zu einem Begriff, so entsteht die Zahl zwei. Addiert man stets noch eine Einheit, so entstehen die Zahlen drei, vier ..... Die Zahlenbildung ist mithin ein successives Addieren von Einheiten.

12. Ziffern (Zahlzeichen) sind die Schriftzeichen, unter welchen man sich die Zahlen vorstellt. Durch dieselben ersparen wir uns das Setzen von eben soviel Zeichen, als Einheiten vorhanden sind. Die Zeichen für eins, zwei, drei, vier .... sind: 1, 2, 3, 4 ....

13. Die unmittelbar aus der Einheit entstandenen Zahlen: 1, 2, 3 u. s. w., nennt man natürliche Zahlen, die Reihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ....

natürliche Zahlenreihe. Der Entstehung zufolge ist jede in dieser Reihe liegende Zahl um 1 gröfser als die zunächst links liegende, z. B. 7 um 1 gröfser als 6, 6 um 1 gröfser als 5, folglich 7 um 2 gröfser als 5.

Da $1+1=2$, $2+1=3$ und folglich $1+1+1=3$ u. s. w., jede Zahl also aus einer bestimmten Menge von Einheiten zusammengesetzt ist, so treten die Einheiten als Teile der Zahl auf und man nennt daher die natürlichen Zahlen auch ganze Zahlen.

14. Addiert man Einheiten ohne Rücksicht auf die Art der Objekte, die sich uns als Einheiten vorstellen, so entsteht die

unbenannte (abstrakte, absolute, reine) Zahl. Werden dagegen Einheiten derselben Art addiert und die ursprünglich nur abstrakte Zahl auf diese Art bezogen, so entsteht die benannte (concrete, relative, angewandte) Zahl. So ist z. B.

3 (= 1 + 1 + 1) eine unbenannte Zahl,
3 Mark, oder abgekürzt: 3 *M.* (= 1 *M.* + 1 *M.* + 1 *M.*) eine benannte Zahl.

15. Die Menge der Einheiten einer Zahl ohne Rücksicht auf die Art des Objekts nennt man auch „Anzahl“. Die Anzahl von Dingen kann also nur eine unbenannte Zahl sein.

16. Es ist 3 = 1 + 1 + 1 und 3 *M.* = 1 *M.* + 1 *M.* + 1 *M.*. In jeder benannten oder unbenannten Zahl ist die Anzahl der Einheiten (hier 3) stets eine unbenannte Zahl (s. 15. Satz), die Einheiten selbst können unbenannt (1) oder benannt (1 *M.*) sein.

17. Zählen heifst die Anzahl der vorhandenen Einheiten durch eine Zahl bestimmen.

18. Zwei Gröfsen sind gleichartig, wenn die eine gleich der andern, oder ein Teil der andern ist. So sind 7 *M.* und 7 *M.* gleichartig; 8 Meter und 3 Meter gleichartig, weil man sich 3 Meter als einen Teil von 8 Metern denken kann. 7 *M.* und 8 Meter sind ungleichartig.

19. Die Zahl ist eine specielle (bestimmte), wenn sie immer nur dieselbe Menge von Einheiten enthält, z. B. 1 Billion, ($\frac{2}{7}$, $24\frac{3}{11}$); eine allgemeine (Buchstabe), wenn sie jede specielle Zahl ausdrücken kann, z. B. a, x.

An einigen Beispielen mag hier — die Kenntnis von gewissen, noch nicht entwickelten Begriffen vorausgesetzt — die Bedeutung und der Gebrauch der allgemeinen Zahlen gezeigt werden:

Es ist $8 + 8 = 2 . 8$ (d. i. 8 vermehrt um 8 gleich 2 mal 8);
$5 + 5 = 2 . 5$;
$29 + 29 = 2 . 29$; allgemein:
$a + a = 2 . a$.

Setzt man in dieser letzten Gleichung $a = 8$, so entsteht jene 1. Gleichung. Ist $a = 29$, so entsteht die 3. Gleichung.

Den Inhalt eines Rechtecks erhält man, wenn man die Länge mit der Breite multipliciert. Bezeichnet man nun die Länge mit a, die Breite mit b, so ist der Inhalt des Rechtecks $= a . b$ (ausgedrückt durch Quadratmafs). Ist z. B. $a = 7$ Meter, die Länge des Rechtecks also 7 Meter, $b =$ 5 Meter, die Breite des Rechtecks also 5 Meter, so geht $a . b$ über in $7 . 5 = 35$ Quadratmeter. Hat man ein Rechteck von 13 Fufs Länge und 4 Fufs Breite zu berechnen, so geht $a . b$ über in $13 . 4$, d. i. 52 Quadratfufs.

20. Die gegebene Linie c (s. 4. Satz) kann als Ganzes aufgefafst und in die Linien a und b (oder in 3 Linien u. s. w.) zerlegt werden. Stellt nun c die Einheit vor, so sind a und b die Teile der Einheit. Einheiten können also auch geteilt werden. Allgemein:

Jede Gröfse kann als Ganzes aufgefafst werden; oder:
Jede Gröfse kann geteilt werden.

§. 2. Die Axiome.

Axiome (Grundsätze, evidente Sätze, Postulate) sind Sätze, die ihrer Einfachheit und Ursprünglichkeit wegen nicht auf noch einfachere Sätze zurückgeführt (d. h. nicht bewiesen) werden können, deren Behauptung also an sich klar ist.

Es giebt nur 2 Axiome:

1. Jede Gröfse ist sich selbst gleich. (Identität nach Inhalt und Form.) Symbolisch: $a = a$. Z. B. $3 = 3$.

2. Für jede Gröfse kann man eine ihr gleiche setzen. (Identität nach Inhalt, aber nicht nach Form.) So kann z. B. in

$$3 = 3$$

an die Stelle der Zahl 3 der linken Seite der Gleichung die gleichbedeutende Gröfse $2 + 1$ gesetzt (für $3 : 2 + 1$ substituiert) werden. Es entsteht alsdann $2 + 1 = 3$.

§. 3. Die ersten Lehrsätze.

Lehrsätze (Theoreme) sind Sätze, die bewiesen werden müssen, d. h. deren Wahrheit und Richtigkeit als eine notwendige Folge aus den bereits als wahr anerkannten Sätzen gezeigt werden mufs.

1. Lehrsatz.

Ist $A = B$ (Voraussetzung),
so ist auch $B = A$ (Behauptung).

Oder: Die Seiten einer Gleichung können vertauscht werden. Ist z. B. $2 + 1 = 3$, so ist auch $3 = 2 + 1$.

Beweis. $A = A$ (s. §. 2, 1).

Nach § 2, 2 kann an die Stelle des A der linken Seite dieser Gleichung das ihm gleiche B (s. Voraussetzung!) gesetzt werden. Alsdann entsteht: $B = A$.

2. Lehrsatz.

Ist $\left.\begin{array}{l} A = C \\ B = C \end{array}\right\}$ (Voraussetzung),
so ist $A = B$ (Behauptung).

Oder: Ist jede von 2 Gröfsen einer dritten gleich, so sind jene unter sich selbst gleich.

Beweis. Da $C = B$ (s. 2. Teil der Voraussetzung und 1. Lehrsatz), so kann an die Stelle des C in der Gleichung

$A = C$ (s. 1. Teil der Voraussetzung)

das ihm gleiche B gesetzt werden. Es entsteht alsdann:

$$A = B.$$

Anmerkung. Eine dritte Art von Sätzen, durch welche die Mathematik lehrt, sind die „Folgerungen aus Erklärungen“. Die in §. 1, 9 gegebenen Sätze sind z. B. nicht Axiome, sondern Sätze dieser 3. Art.

§. 4. Arten der Gröfsen. Einteilung der Mathematik.

Die Gröfsen sind:

I. Zahlgröfsen (discrete, gesonderte, unstetige), solche, deren Teile (Einheiten) unter sich getrennt vorhanden sind; oder

II. Raumgröfsen (stetige oder continuierliche Gröfsen), solche, deren Teile in ununterbrochenem Zusammenhange stehen (bei welchen die Grenze des einen Teils zugleich die Grenze des nächsten ist).

Hiernach teilt man die Mathematik ein in:

I. Arithmetik — Lehre von den Zahlgröfsen.
II. Geometrie — Lehre von den Raumgröfsen.

Arithmetik.

§. 5. Einteilung der Gleichungen und der Arithmetik.

1. Die Gleichungen sind entweder:

I. unbedingte (analytische, identische), wenn die linke Seite der rechten ohne besondere Bedingungen in Bezug auf den Wert der Gröfsen gleich ist. Z. B.: $3+1=4$.
[$x+2\cdot x=3\cdot x$: denn in dieser Gleichung kann für x jede nur mögliche Gröfse gesetzt werden, immer ist die rechte Seite der linken gleich. Setzt man z. B. $x=9$, so entsteht: $9+2\cdot 9=3\cdot 9$, d. i. $9+18=27$, oder setzt man $x=50$, so entsteht:

$$50+2\cdot 50=3\cdot 50, \text{ d. i. } 50+100=150.]$$

II. oder bedingte (synthetische, algebraische), wenn die linke Seite der rechten nur für gewisse Werte der allgemeinen und zu suchenden Gröfse (x) gleich ist. Z. B.:

$$3+x=12.$$

[Hier ist nur $x=9$, während in $x+2\cdot x=3\cdot x$ (s. I.) für x jede Gröfse gesetzt werden konnte.]

2. Hiernach wird die Arithmetik eingeteilt in:

I. Zahlenlehre — Lehre von den unbedingten Gleichungen.

A. Specielle Zahlenlehre (Zifferrechnen, Elementarrechnen, gemeine Arithmetik), wenn die Gleichungen nur specielle Zahlen enthalten.

B. Allgemeine Zahlenlehre (Buchstabenrechnung, allgemeine Arithmetik), wenn die Gleichungen allgemeine Zahlen enthalten.

II. Algebra — Lehre von den bedingten Gleichungen.

Die Algebra bestimmt, wie grofs in der bedingten Gleichung (z. B. $3+x=12$, s. 1, II) die Unbekannte (x) genommen werden mufs, damit die linke Seite der rechten gleich wird.

3. Unter Species (Grundrechnungsarten) versteht man 7 Grundoperationen mit Zahlen, und zwar die Addition mit Zahlen

und diejenigen 6 Operationen, welche unmittelbar aus dieser Addition durch Vereinfachung und Umkehrung entstehen.

Sie heifsen:

Direkte Species:	Indirekte Species (Umkehrungen):
I. Addition.	II. Subtraktion.
III. Multiplication.	IV. Division.
V. Potenzieren.	{ VI. Radicieren. VII. Logarithmieren.

Die 7 Species (§. 6—17).

§. 6. Addition.

1. Die Addition (das Addieren) sucht eine Zahl, die eben soviel Einheiten enthält, als mehrere andere gegebene Zahlen zusammengenommen. (Vergleiche diese arithmetische Definition mit der allgemein-mathematischen §. 1, 4!).

Gegeben Gesucht

$8 + 3 \quad = 11$

Summand Summand — Summe

Summe

Gelesen: „8 plus 3 gleich 11",
oder: „8 vermehrt um 3",
oder: „Summe aus 8 und 3".

Die gegebenen, zu addierenden Zahlen heifsen Summanden (Addenden, Aggreganden, Posten, Glieder).

Summe (Aggregat) ist die Zahl, welche so viel Einheiten enthält, als die Summanden zusammengenommen. Um 8 und 3 zu addieren, erhält man zunächst $8 + 3$ (formelle oder theoretische Summe), wofür die Praxis, wenn es möglich ist, eine Zahl: 11, verlangt (materielle oder praktische Summe).

2. Erklärungen.

I. Rechnen heifst Zahlenausdrücke umformen. Man rechnet, wenn man statt $8 + 3$: 11, statt 11: $8 + 3$, statt 2: $1 + 1$, statt $1 + 2$: $2 + 1$ setzt.

II. Soll ein zusammengesetzter Ausdruck als eine einzige Gröfse betrachtet werden, so ist er in Parenthese (Klammer) zu setzen. Soll zu 5 die Summe $4 + 3$ addiert werden, so ist $5 + (4 + 3)$ zu setzen, welchen Ausdruck man sich eben so wie $5 + 7$ zu denken hat. Wäre 6 wieder um diesen Ausdruck $5 + (4 + 3)$ zu vermehren, so würde $6 + [5 + (4 + 3)]$ zu setzen sein. Um nicht unnötige Zeichen zu schreiben und das Rechnen mit zusammengesetzten Ausdrücken hierdurch zu hemmen, läfst man

jedoch die Parenthesen weg, wenn das Resultat kein zweideutiges werden kann.

§. 7. Additionssätze.

1. Die Anordnung zweier Summanden ist beliebig.

$4 + 3 = 3 + 4$. Allgemein: $a + b = b + a$.

Beweis. $4 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1$
$+ 1 + 1 + 1$.

Beginnt man das Zählen der Einheiten mit der 2. Zeile, so entsteht $3 + 4$. Folglich ist $4 + 3 = 3 + 4$.

2. Um 3, 4 und 5 Einheiten:

• • •
• • • •
• • • • •

zu addieren, könnte man zunächst die Einheiten der 2. und 3. Zeile addieren $= (4 + 5)$, und dann die 1. Zeile um jene Summe vermehren $= 3 + (4 + 5)$.

Man könnte aber auch zuerst die Einheiten der 1. und 2. Zeile addieren $= (3 + 4)$, und dann die Einheiten der 3. Zeile hinzufügen $= (3 + 4) + 5$.

Ferner könnte man $4 + (5 + 3)$ rechnen u. s. w.

Da alle diese Ausdrücke dieselbe Menge von Einheiten enthalten, so ist:

$$3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5 = 4 + (5 + 3) = (4 + 5) + 3$$
$$= (5 + 3) + 4 \text{ u. s. w. Allgemein:}$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c = b + (c + a) = (b + c) + a$$

u. s. w.

3. Betrachtet man von den vorstehenden Ausdrücken zunächst $3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5$, so bedeutet dies, dafs man zu 3 die Summe $(4 + 5)$ addieren kann, wenn man zuerst 3 um den einen Summand 4 vermehrt $= (3 + 4)$, alsdann die erhaltene Summe noch um den andern Summand 5. Oder:

Anstatt eine Summe zu addieren, kann man ihre Summanden einzeln addieren. Symbolisch:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Beispiel. $8 + (2 + 7) = (8 + 2) + 7 = 10 + 7 = 17$.

Zusatz. Vergleicht man

$$3 + 4 = (3 + 4)$$
$$\text{mit } 3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5,$$

so ergiebt sich der Satz:

Um so viel gröfser der Summand, um so viel gröfser die Summe.

4. $3 + 4 + 5$ könnte man entweder mit
$3 + (4 + 5) = 3 + 9 = 12$, oder mit
$(3 + 4) + 5 = 7 + 5 = 12$ u. s. w. berechnen,

da aber $3+(4+5)=(3+4)+5$ u. s. w. (siehe 2. und 3. Satz), also bei beliebiger Berechnung des Ausdrucks $3+4+5$ doch immer dasselbe Resultat erzielt wird, so ist es nicht nötig, die Parenthesen zu schreiben, sondern dafür den einfachen Ausdruck $3+4+5$. Oder:

Die mehrere Summanden einer Summe einschliefsende Parenthese kann beliebig weggelassen werden. Symbolisch:

$$a+(b+c)=a+b+c;$$
$$(a+b)+c=a+b+c.$$

5. Ist $3+(4+5)=3+4+5$ und $(3+4)+5=3+4+5$, so mufs auch umgekehrt für $3+4+5$: $3+(4+5)$ oder $(3+4)+5$ gesetzt werden können (s. §. 3, 1). Oder:

Man kann beliebig mehrere Summanden einer Summe in Parenthese setzen. Symbolisch:

$$a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c.$$

6. Dem 4. Satze zufolge gehen die Ausdrücke des 2. Satzes nun über in: $3+4+5=4+5+3=5+3+4$ u. s. w. Oder:

Die Anordnung von mehr als 2 Summanden ist beliebig. Symbolisch:

$$a+b+c=c+b+a=b+c+a=a+c+b \text{ u. s. w.}$$

7. Nach dem 6. und 5. Satze ist:

$$3+4+6+7+9=3+7+4+6+9=(3+7)+(4+6)+9$$
$$=10+10+9=(10+10)+9=20+9=29.$$ Oder:

Um eine Summe zu berechnen (Zahlen zu addieren), kann man immer je 2 Summanden in beliebiger Ordnung in eine Zahl vereinigen.

8. $3\,\mathcal{M}+2\,\mathcal{M}=(1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M})+(1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M})$
$=1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M}=5\,\mathcal{M}$.

Dagegen:

$3\,\mathcal{M}+2$ Meter $=1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M}+1\,\mathcal{M}+1$ Meter $+\,1$ Meter,

also weder $5\,\mathcal{M}$ noch 5 Meter.

Hieraus ergiebt sich:

I. Nur gleichartige und gleichbenannte Gröfsen können addiert werden.

II. Die Summe ist gleichartig und gleichbenannt mit den Summanden.

Dennoch lassen sich ungleichbenannte gleichartige Gröfsen addieren, wenn sie gleichbenannt gemacht werden können. Z. B. 5 Männer + 4 Frauen = 5 Personen + 4 Personen = 9 Personen.

9. Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches.

Ist $A=B$ (Voraussetzung),

so ist auch $A+C=B+C$ (Behauptung).

Man schreibt auch: $\left.\begin{array}{l}A=B\\C=C\end{array}\right\}$ (Voraussetzung),

$\overline{A+C=B+C}$ (Behauptung).

Beweis. Es ist $A + C = A + C$ (s. 1. Axiom).
Setzt man an die Stelle des A der rechten Seite dieser Gleichung das ihm gleiche B (s. Voraussetzung und 2. Axiom), so entsteht:

$$A + C = B + C.$$

Zusatz. Ist $\left.\begin{array}{l} A = B \\ C = D \end{array}\right\}$ (Voraussetzung),

so ist auch $A + C = B + D$ (Behauptung).

Beweis. Setzt man in

$$\begin{array}{c} A = B \\ C = C \\ \hline A + C = B + C \end{array}$$ (s. 9. Satz, 4. Zeile)

an die Stelle des C der rechten Seite der beiden letzten Gleichungen das ihm gleiche D (s. Voraussetzung), so entsteht:

$$\begin{array}{c} A = B \\ C = D \\ \hline A + C = B + D. \end{array}$$

§. 8. Subtraktion.

1. Die Subtraktion (das Subtrahieren) ist die Umkehrung der Addition (daher die 1. indirekte Species). Sie sucht aus der Summe (einer Additionsgleichung) und einem der beiden Summanden derselben den andern Summand. [Genetische Definition!]

In Bezug auf $8 + 3 = 11$ würde also die Subtraktion

I. entweder aus der Summe 11 und einem der beiden Summanden, z. B. 3, den andern Summand 8 suchen. Geschrieben:

Gegeben Gesucht
$11 - 3 = 8$

Minuend Subtrahend Rest

(Minuend und Subtrahend zusammen: Rest)

Gelesen: „11 minus 3 gleich 8";
oder: „11 vermindert um 3";
oder: „Differenz aus 11 und 3".

II. oder es würde die Subtraktion aus der Summe $8 + 3$ und einem der beiden Summanden 3 (oder 8) den andern Summand 8 (oder 3) suchen:

$(8 + 3) - 3 = 8$ oder $(8 + 3) - 8 = 3$.
Min. Shd. Rest Min. Shd. Rest

Zusatz. Ist die Additionsgleichung richtig, so mufs auch die Summe um den einen Summand vermindert, den andern Sum-

mand geben. Ist z. B. $9 + 5 = 14$ richtig, so mufs auch $14 - 9 = 5$ und $14 - 5 = 9$ sein.

Da nun $3 + 1 = 4$, $2 + 1 = 3$, $1 + 1 = 2$, so ist auch
$4 - 1 = 3$, $3 - 1 = 2$, $2 - 1 = 1$.

Auf Grund der Subtraktion kann man mithin in der natürlichen Zahlenreihe rückwärts schreiten: .... 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

2. Die Summe (11) wird also zum Minuend (s. 1, I),
der gegebene Summand (3) zum Subtrahend,
der gesuchte Summand (8) zum Rest.

3. Mittelst der nun abgeleiteten Begriffe sind folgende Realdefinitionen möglich:

Subtrahieren heifst eine Zahl (8) suchen, die zum Subtrahend (3) addiert, den Minuend (11) giebt.

Rest (Differenz, Unterschied) ist die Zahl, welche zum Subtrahend addiert, den Minuend giebt. $11 - 3$ ist der formelle, theoretische Rest, 8 der materielle, praktische Rest.

4. Die Vergleichung ungleicher Zahlen durch Addition und Subtraktion erfordert stets den Comparativ. Z. B.: 8 ist um 3 gröfser als 5; A hat 4 Mark mehr als B; 2 ist um 4 kleiner als 6; B hat 4 Mark weniger als A. Bei ungleichen Zahlen gebraucht man „als“, bei gleichen Zahlen „als“ und „wie“. Z. B.: $5 + 2$ ist eben so grofs wie $6 + 1$ (oder: als $6 + 1$), falsch dagegen: 5 ist gröfser wie 2.

Die Subtraktion beantwortet die Frage, um wie viel gröfser oder kleiner eine Zahl ist als eine andere.

Beispiel. Um viel gröfser ist 12 als 9?
Antwort: um $12 - 9$, d. i. um 3.

Um wie viel kleiner ist 3 als 7?
Antwort: um $7 - 3$, d. i. um 4.

§. 9. Subtraktionssätze.

1. Der Beweis für die Sätze der indirekten Species ist dadurch zu führen, dafs sie auf die Sätze der direkten Species zurückgeführt werden, aus welchen sie entstanden sind.*)

---

*) Die Beweisführung für die Sätze der Zahlenlehre nahm früher auf diese Entstehung keine Rücksicht. Nicht oft, sondern in der Regel ging man von falschen und unbewiesenen Sätzen aus. Später wurde man rationeller, indem man beide Seiten auf gleiche Weise veränderte. Um z. B. $\frac{a}{b} . c = \frac{a . c}{b}$ zu beweisen, multiplicierte man beide Seiten mit b. Man erhielt $b . \frac{a}{b} . c = b . \frac{a . c}{b}$, d.i. $a . c = a . c$, folglich richtig! Aber auch diese Beweisführung ist unrichtig, da sie erstens die Entstehung der Division aus der Multiplication nicht berücksichtigt, und zweitens die Sätze: „Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches“ u. s. w. anwendet, die nur in der Algebra Anwendung finden dürfen. Die Algebra allein darf den

Die Sätze der Subtraktion müssen also richtig sein, wenn die zugehörige Additionsgleichung richtig ist, wenn also

Gesuchter Summand + gegebener Summand = der Summe,
oder Gegebener Summand + gesuchter Summand = der Summe
ist, folglich wenn

Rest + Subtrahend = Minuend,
oder Subtrahend + Rest = Minuend ist.

Beispiel. $1123 - 456 = 667$ ist richtig, weil Rest + Subtrahend $= 667 + 456 = 1123$ und diese Zahl dem Minuend gleich ist. (Probe für die Richtigkeit der Subtraktion!)

2. $(8 + 3) - 3 = 8$ und $(8 + 3) - 8 = 3$; allgemein $(a + b) - b = a$ und $(a + b) - a = b$. Oder:

Eine aus 2 Summanden bestehende Summe um einen der Summanden vermindert, giebt den andern Summand.

Diese Sätze sind zwar schon unmittelbar aus der genetischen Definition der Subtraktion (s. §. 8, 1, II) abgeleitet worden, sie könnten aber auch nach vorstehendem 1. Satze dadurch bewiesen werden, dafs man zunächst auf der linken Seite der Gleichung Minuend (die zu vermindernde Zahl) und Subtrahend (die abzuziehende Zahl), rechts den Rest (Resultat der Subtraktion) unterscheidet:

$$\underbrace{(8+3)}_{\text{Minuend}} - \underbrace{3}_{\text{Shd.}} = \underbrace{8}_{\text{Rest}}$$

Da nun Rest + Shd. $= 8 + 3 =$ dem Minuend, so ist (siehe Satz 1) diese Subtraktionsgleichung richtig.

3. Aus $8 + 3 = 11$ folgt sowohl $11 - 3 = 8$, als auch $11 - 8 = 3$. Mithin kann aus $11 - 3 = 8$ stets $11 - 8 = 3$ gebildet werden. Allgemein:

Man kann den Rest stets mit dem Subtrahend vertauschen.
Oder:

Der Minuend um den Rest vermindert, giebt den Subtrahend.

Aus $a - b = (a - b)$ folgt daher auch $a - (a - b) = b$.

4. Ist die Subtraktionsgleichung richtig, so mufs auch

Rest + Subtrahend = Minuend
und Subtrahend + Rest = Minuend sein.

Ist daher $11 - 3 = 8$ richtig, so mufs auch $8 + 3 = 11$ richtig sein. Um also zu untersuchen, ob eine Addition richtig ist,

---

Wert der Seiten verändern. Sie bildet aus

$$\frac{3x}{2} = 12 \text{ die Gleichung}$$
$$3x = 24.$$

Die rechte Seite hat zuerst den Wert 12, dann 24. Die Zahlenlehre dagegen läfst den Wert der Seiten der Gleichung stets unverändert, z. B. $2.(3.4 + 5.6) = 2.(12 + 30) = 2.42 = 84$. Hier sind alle Ausdrücke vor und nach den Gleichheitszeichen einander gleich.

kann man die Summe um den einen Summand vermindern. Ergiebt sich der andere Summand, so mufs die Addition richtig sein.

5. Da $a - b = (a - b)$ unbedingt (apodiktisch) richtig ist und Min. Shd. Rest unterschieden werden kann, so mufs auch

I. Rest + Shd. = Min. und

II. Shd. + Rest = Min. sein, d. i.

I. $(a - b) + b = a$, oder:

Eine Differenz, um den Subtrahend vermehrt, giebt den Minuend.

II. $b + (a - b) = a$.

Zusatz. Kehrt man II um, so erhält man:

$$a = b + (a - b).$$

Dieser Satz löst die Aufgabe: „Welche Zahl ist zu 7 zu addieren, um 11 zu erhalten?" Denn $11 = 7 + (11 - 7) = 7 + 4$. Es ist also zu 7 die Zahl 4 zu addieren!

6. Bezeichnen wir „Nichts" mit dem Zeichen 0 (Null) — die wahre Bedeutung von 0 lehrt §. 18 —, so ist: „8 vermehrt um Nichts = 8", oder: „$8 + 0 = 8$"; allgemein: $a + 0 = a$.

Aus diesen Gleichungen folgt (nach §. 8, 1) unmittelbar:

I. $\begin{cases} 8 - 0 = 8; \text{ allgemein:} \\ a - 0 = a, \text{ oder:} \end{cases}$

Eine Zahl um Null vermindert giebt jene Zahl selbst wieder.

II. $\begin{cases} 8 - 8 = 0; \text{ allgemein:} \\ a - a = 0; \text{ oder:} \end{cases}$

Eine Zahl um sich selbst vermindert giebt 0.

7. Um $a + b - b$ oder $a - b + b$ oder $b + a - b$ zu berechnen, könnte man die Zahlen in verschiedener Ordnung verbinden, und zwar:

I. zuerst $a + b$ berechnen, dann b subtrahieren, also $(a + b) - b$ berechnen. Nach Satz 2 aber ist $(a + b) - b = a$.

II. Man könnte auch erst $a - b$ berechnen und dann b addieren, also $(a - b) + b$ berechnen. Aber auch dies ist nach dem 5. Satze $= a$.

Eben so:

III. $b + (a - b) = a$, (s. 5. Satz),

IV. $a + (b - b) = a + 0 = a$,

V. $(b - b) + a = 0 + a = a$.

Da das Resultat immer dasselbe ($= a$) ist, so ist offenbar nicht nötig, $(a + b) - b = a$ u. s. w. zu schreiben, vielmehr können die Parenthesen weggelassen werden, und es genügt:

A. $a + b - b = a$; z. B.: $7 + 3 - 3 = 7$.

B. $a - b + b = a$; z. B.: $9 - 2 + 2 = 9$.

C. $b + a - b = a$; z. B.: $6 + 8 - 6 = 8$.

Anmerkung. Summanden und Minuenden nennt man auch additive, Subtrahenden subtraktive Zahlen. Den letzten Sätzen A, B, C zufolge heben sich immer gleiche additive und subtraktive Zahlen ($+b$ mit $-b$ und $-b$ mit $+b$).

8. $$\underset{\text{Min.}}{(a+b)} - \underset{\text{Shd.}}{c} = \underbrace{(a-c)+b}_{\text{Rest}};$$ oder:

Anstatt eine Summe um irgend eine Zahl zu vermindern, kann man einen der Summanden um diese Zahl vermindern und den Rest um den andern Summand vermehren.

Beweis.

Shd. + Rest $= c + (a-c) + b = a + b$ (s. 5. Satz II) = Minuend!

z. B.: $(23+8)-3=(23-3)+8=20+8=28$.

1. Zusatz. Derselbe Satz läfst sich nach §. 7, 1 auch schreiben:

$(b+a)-c=b+(a-c)$; oder:

Anstatt eine Summe zu vermindern, kann man auch den einen Summand um den Rest aus dem andern Summand und den Subtrahend vermehren. Z. B.:

$(6+17)-7=6+(17-7)=6+10=16$.

2. Zusatz. Vergleicht man:

$b-c=(b-c)$

mit $(a+b)-c=a+(b-c)$, so ergiebt sich:

Um so viel gröfser der Minuend, um so viel gröfser der Rest.

9. Umgekehrt:

$(a-c)+b=(a+b)-c$; oder:

Anstatt eine Differenz um irgend eine Zahl zu vermehren, kann man den Minuend um diese Zahl vermehren und von der entstehenden Summe den Subtrahend abziehen.

Z. B.: $(20-3)+8=(20+8)-3=28-3=25$.

Zusatz. Kehrt man Satz 8, Zus. 1 um, so erhält man:

$b+(a-c)=(b+a)-c$; oder:

Anstatt eine beliebige Zahl um eine Differenz zu vermehren, kann man die Zahl um den Minuend vermehren, und von der Summe den Subtrahend abziehen.

Z. B.: $5+(10-4)=(5+10)-4=15-4=11$.

10. $a+b-c$ und $a-c+b$, in beliebiger Ordnung berechnet, giebt nach den bisherigen Sätzen:

I. $a+(b-c)=(a+b)-c$;

II. $(b-c)+a=a+(b-c)=(a+b)-c$;

III. $(a-c)+b=(a+b)-c$;

IV. $b+(a-c)=(b+a)-c=(a+b)-c$.

Da immer dasselbe Resultat: $(a+b)-c$ erscheint, so sind

A. die Parenthesen unnötig und man schreibt:

statt $(a+b)-c$ nur $a+b-c$,

„ $(a-c)+b$ nur $a-c+b$,

„ $a+(b-c)$ nur $a+b-c$.

Zusatz.

$$a+(b+c)=a+b+c \text{ und } a+(b-c)=a+b-c$$

führen zu dem Satze:

Die nach einem Pluszeichen befindliche Parenthese kann stets weggelassen werden, ohne dafs sich die in derselben befindlichen additiven und subtraktiven Zahlen ändern.

Beispiel. $4+(5+8-2)=4+5+8-2$;

$$a+(b-c-d+e)=a+b-c-d+e.$$

B. Anstatt: $(a+b)-c=(a-c)+b$ kann nun auch

$$a+b-c=a-c+b$$

geschrieben werden. Oder:

Die additiven und subtraktiven Zahlen können beliebig angeordnet werden.

Beispiel. $17+9-7=17-7+9=10+9$.

11. $(a+d)-(b+d)=a-b$; oder:

Die im Minuend und Subtrahend enthaltenen gleichen Summanden heben sich.

Beweis.

$$\text{Rest}+\text{Shd.}=(a-b)+(b+d)=[(a-b)+b]+d$$
$$=a+d=\text{Min.}$$

12. Umkehrung:

$$a-b=(a+d)-(b+d); \text{ oder:}$$

Die Differenz bleibt unverändert, wenn Minuend und Subtrahend um dieselbe Gröfse vermehrt werden.

Beispiel.

$$1123-796=(1123+4)-(796+4)=1127-800=327.$$

13. $(a-d)-(b-d)=a-b$. (Vergl. 11.)

Beweis.

$$\text{Rest}+\text{Shd.}=(a-b)+(b-d)=[(a-b)+b]-d$$
$$=a-d=\text{Min.}$$

14. Umgekehrt:

$$a-b=(a-d)-(b-d).$$

15. $(a-b)-c=(a-c)-b$.

Beweis.

$$\text{Rest}+\text{Shd.}=[(a-c)-b]+c=[(a-c)+c]-b$$
$$=a-b=\text{Min.}$$

Da $a-b-c$ und $a-c-b$ nur entweder als $(a-b)-c$ oder als $(a-c)-b$ berechnet werden können, beide Ausdrücke aber gleich sind, so ist:

$$a-b-c=a-c-b; \text{ oder:}$$

Die Anordnung der Subtrahenden ist beliebig.

Da nun

$$[(a-b)+c]-d \quad =[(a+c)-b]-d \text{ (s. Satz 9)}$$
$$=[(a+c)-d]-b \text{ (s. 15. Satz)}=[(c+a)-d]-b$$
$$=[(c-d)+a]-b \text{ (s. 8. Satz)} =[(c-d)-b]+a \text{ (s. 8. Satz)}$$

u. s. w., so kann also $a-b+c-d$ als $[(a-b)+c]-d$

oder als $[(c - d) - b] + a$ u. s. w. berechnet werden. Allgemein:
Jeder aus vielen additiven und subtraktiven Zahlen bestehende Ausdruck kann in beliebiger Ordnung (immer je 2 beliebige Zahlen verbindend) berechnet werden.

Beispiele:

$$13 - 6 - 3 = 13 - 3 - 6 = 10 - 6;$$
$$7 - 3 + 9 + 5 - 9 + 3 = 7 + (9 - 9) + (3 - 3) + 5 = 7 + 0 + 0 + 5 = 12;$$
$$d - b + a - c - a + b = d + (a - a) + (b - b) - c = d + 0 + 0 - c = d - c.$$

Zusatz. Vergleicht man

$$a - c = (a - c)$$
mit $(a - b) - c = (a - c) - b,$

so ergiebt sich der Satz:
Um so viel kleiner der Minuend, um so viel kleiner der Rest.

16. $$a - (b + c) = a - b - c.$$ Oder:

I. Löst man nach einem Minuszeichen eine Parenthese auf, so verwandeln sich die in derselben befindlichen Summanden in Subtrahenden.

II. Anstatt eine Summe abzuziehen, kann man die Summanden einzeln abziehen.

Beweis.

$$\text{Rest} + \text{Shd.} = a - b - c + (b + c) = a - b - c + b + c = a = \text{Min.}$$

Beispiel.

$$29 - (9 + 5) = 29 - 9 - 5 = 20 - 5.$$

Zusatz. Vergleicht man:

$$a - b = (a - b)$$
mit $a - (b + c) = (a - b) - c$, so ergiebt sich:
Um so viel gröfser der Subtrahend, um so viel kleiner der Rest.

17. Umkehrung:

$$a - b - c = a - (b + c).$$ Oder:

I. Bildet man nach einem Minuszeichen eine Parenthese, so verwandeln sich die Subtrahenden in derselben in Summanden (in additive Zahlen).

II. Anstatt mehrere Zahlen einzeln zu subtrahieren, kann man ihre Summe subtrahieren. Z. B.:

$$23 - 7 - 3 = 23 - (7 + 3) = 23 - 10.$$

Zusatz.

$$a - b + c - d + e - f = a + c + e - b - d - f = (a + c + e) - (b + d + f);$$ oder:

Um einen aus vielen additiven und subtraktiven Zahlen bestehenden Ausdruck zu berechnen, kann man die Summe der additiven Zahlen um die Summe der subtraktiven vermindern. Z. B.:

$$11 - 6 + 8 - 4 = 11 + 8 - 6 - 4 = (11 + 8) - (6 + 4)$$
$$= 19 - 10 = 9;$$
$$234 - 147 + 456 - 369 + 678 - 789$$
$$= (234 + 456 + 678) - (147 + 369 + 789)$$
$$= 1368 - 1305 = 63.$$

18. $a - (b - c) = a - b + c$; oder:

Löst man nach einem Minuszeichen eine Parenthese auf, so verwandeln sich die in derselben befindlichen Subtrahenden in Summanden.

Beweis.

Rest + Shd. $= a - b + c + (b - c) = a - b + c + b - c$
$= a =$ Min.

Beispiel.

$$18 - (8 - 5) = 18 - 8 + 5 = 10 + 5.$$

Zusatz. Vergleicht man
$$a - b = (a - b)$$
mit $a - (b - c) = (a - b) + c$, so ergiebt sich:

Um so viel kleiner der Subtrahend, um so viel gröfser der Rest.

19. Umkehrung:
$$a - b + c = a - (b - c).$$ Oder:

Bildet man nach einem Minuszeichen eine Parenthese, so verwandeln sich die Summanden in derselben in Subtrahenden.

Beispiele: $31 - 19 + 9 = 31 - (19 - 9) = 31 - 10.$

Mit Rücksicht auf Satz 17 und 19:
$$a - b - c + d - 1 = a - (b + c - d + 1),$$ oder auch:
$$a - b - c + d - 1 = a - b - (c - d + 1).$$

Anmerkung. Da $a - b + c$ nicht gleichbedeutend mit $a - (b + c)$, d. i. $a - b - c$ ist, so ist hier die Parenthese wesentlich. Um also einen mehrteiligen Ausdruck zu subtrahieren, hat man den nach dem Subtraktionszeichen zu setzenden Ausdruck in Parenthese zu stellen. Soll a um $b + c$ oder $b - c$ vermindert werden, so ist $a - (b + c)$ und $a - (b - c)$ zu schreiben. Dagegen ist $a + (b + c) = a + b + c$ und $a + (b - c) = a + b - c$ (s. §. 9, 10, Zusatz). Um also einen mehrteiligen Ausdruck zu addieren, schliefst man den mehrteiligen Ausdruck nicht ein.

20. Da die Summe mit den Summanden gleichartig sein mufs, aus der Additionsgleichung aber die Subtraktionsgleichung hervorgeht, so müssen auch Minuend, Subtrahend und Rest gleichartig sein, oder:

Nur Gleichartiges kann subtrahiert werden.

21. Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt Gleiches.

Ist $A = B$ (Voraussetzung)
so ist auch $A - C = B - C$ (Behauptung).

Dafür schreibt man auch:
$$\left.\begin{array}{l} A = B \\ C = C \end{array}\right\} \text{(Voraussetzung)}$$
$$\overline{A - C = B - C} \text{ (Behauptung).}$$

Beweis. $A - C = A - C$ (s. 1. Axiom)
geht, wenn man an die Stelle des A der rechten Seite das ihm gleiche B (s. Voraussetzung) setzt, über in:

$$A - C = B - C.$$

Zusatz. Ist $A = B$
und $C = D$
so ist auch $A - C = B - D$ (Vergl. §. 7, 9, Zus.)

§. 10. Multiplication.

1. Die zu addierenden Summanden sind gewöhnlich verschieden. Sind sie gleich, z. B.:

$$8 + 8 + 8 = 24,$$

so kürzt dies die Multiplication durch 2 Zahlen in folgender Weise ab:

Gegeben Gesucht
$8 \cdot 3 \quad = 24$
(8 = Multiplicand, 3 = Multiplicator, 24 = Produkt; $8 \cdot 3$ = Produkt)

Gelesen: „8 mal 3 gleich 24",
oder: „8 multipliciert mit 3",
oder: „das Produkt aus 8 und 3".

Der Summand (8) wird zum Multiplicand,
die Anzahl der Summanden (3) zum Multiplicator,
die Summe zum Produkt.

Multiplication ist also die abgekürzte Addition gleicher Summanden.

Produkt ist das Resultat der Multiplication, oder (bestimmter): die abgekürzte Summe gleicher Summanden.

$8 \cdot 3$ das formelle oder theoretische, 24 das materielle oder praktische Produkt.

Gewöhnlich unterscheidet man nicht Multiplicand und Multiplicator, sondern nennt die zu multiplicierenden Zahlen:

Faktoren. In $8 \cdot 3$ ist 8 der erste, 3 der zweite Faktor.

Die Multiplication hat eigentlich kein Zeichen. Das nebeneinanderstellen der Faktoren zeigt schon ihre Multiplication an. Soll $(7 + 2)$ mit $(4 + 1)$ multipliciert werden, so kann man

$$(7 + 2) \cdot (4 + 1), \text{ aber auch } (7 + 2)\,(4 + 1)$$

schreiben. Das Produkt aus 3 und $x = 3x$. a mit b multipliciert $= ab$. Nur um Verwechselungen zu vermeiden, wendet man als Multiplicationszeichen den Punkt oder das liegende Kreuz an. Das Produkt aus 2 und 3 ist daher (der Zahl 23 wegen) $2 \cdot 3$ zu schreiben. Der Inhalt des Rechtecks ist = dem Produkt aus Grundlinie und Höhe = Grundl. $\times$ Höhe (d. i. Grundlinie mal Höhe).

Beispiele:

$$7+7+7+7=28;\ \text{dafür}\ 7\cdot 4=28;$$
$$2+2+2+2+2=10;\ \text{„}\ 2\cdot 5=10;$$
$$6\,\mathcal{M}+6\,\mathcal{M}=12\,\mathcal{M};\ \text{„}\ 6\,\mathcal{M}\cdot 2=12\,\mathcal{M};$$
$$13+13=13\cdot 2;\quad 9+9+9+9+9+9=9.6;$$
$$x+x+x=x\cdot 3.$$

2. Umkehrung:

$$7\cdot 3=7+7+7;$$
$$11\cdot 4=11+11+11+11;$$
$$a\cdot 2=a+a;$$
$$8\,\mathcal{M}\cdot 5=8\,\mathcal{M}+8\,\mathcal{M}+8\,\mathcal{M}+8\,\mathcal{M}+8\,\mathcal{M}.;$$
$$1\cdot 3=1+1+1;$$
$$b\cdot 6=b+b+b+b+b+b.$$

3. Erklärungen.

I. Die 1., 2., 3. . . . . Zahl eines Ausdrucks bezeichnet man mit den darüber gesetzten Zahlen 1, 2, 3 . . . ., die „Indices" (Zeiger, Ordnungszahlen, Stellenzahlen) genannt werden.

Beispiele:

$$\overset{1}{\smile}\!\!\!\!7+\overset{2}{\smile}\!\!\!\!7+\overset{3}{\smile}\!\!\!\!7+\overset{4}{\smile}\!\!\!\!7=7\cdot 4;$$
$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\overset{4}{a}+\overset{5}{a}=a\cdot 5;$$
$$(8\overset{1}{+}4)+(8\overset{2}{+}4)+(8\overset{3}{+}4)=(8+4)\cdot 3.$$

II. Sind also die gleichen Summanden mit ihren Indices bezeichnet, so bildet man das Produkt, indem man als 1. Faktor den Summand, als 2. Faktor den letzten Index setzt. Alsdann ist also (s. 1. Satz) der 1. Faktor Multiplicand, der 2. Factor Multiplicator.

Beispiele:

$$\overset{1}{8}+\overset{2}{8}+\overset{3}{8}+\ldots\ldots+\overset{19}{8}=8\cdot 19.$$

Die Punkte zeigen hier an, dafs die Zahlen 1, 2, 3 bis 19 fortzusetzen sind.

$$\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\overset{3}{a}+\ldots\ldots+\overset{100}{a}=a\cdot 100;$$
$$(a\overset{1}{\,}b)+(a\overset{2}{\,}b)+(a\overset{3}{\,}b)+\ldots\ldots+(a\overset{c}{\,}b)=(a\,b)\cdot c;$$
$$\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{1}+\ldots\ldots+\overset{a}{1}=1\cdot a.$$

III. Umgekehrt ist:

$$9\cdot 4=\overset{1}{9}+\overset{2}{9}+\overset{3}{9}+\overset{4}{9};$$
$$a\,b=\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\ldots\ldots+\overset{b}{a};$$
$$1\cdot n=\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\ldots\ldots+\overset{n}{1}.$$

IV. Werden Produkte (durch Multiplication entstandene Ausdrücke) addiert oder subtrahiert, allgemein:

werden Ausdrücke, die durch höhere Rechnungsarten entstanden sind, durch niedere Rechnungsarten verbunden,

so schliefst man jene nicht ein.

Um $8 \cdot 3$ und 4 zu addieren, schreibt man nicht $(8 \cdot 3) + 4$, sondern nur $8 \cdot 3 + 4$. Umgekehrt bedeutet $5 + 6 \cdot 7$ so viel als $5 + (6 \cdot 7) = 5 + 42 = 47$, aber nicht $11 \cdot 7$. Soll jedoch ein mehrteiliger Ausdruck mit irgend einer Zahl multipliciert werden, so ist jener einzuschliefsen. Um z. B. 8 mit $3 + 4$ zu multiplicieren, hat man $8 \cdot (3 + 4)$ oder $8(3 + 4)$ zu schreiben. 5 mit $9 - 2$ multipliciert $= 5(9 - 2)$. Soll dagegen $5 \cdot 9$ um 2 vermindert werden, so ist statt $(5 \cdot 9) - 2$ nur $5 \cdot 9 - 2$ zu schreiben.

$7 + 5$ mit $6 - 1$ multipliciert $= (7 + 5) \cdot (6 - 1)$ oder
$= (7 + 5)(6 - 1)$, d. i. $12 \cdot 5$.

Dagegen würde $7 + 5 \cdot 6 - 1$ bedeuten: $7 + (5 \cdot 6) - 1$
$= 7 + 30 - 1$.

$5 + 7 \cdot 9 - 3 \cdot 2$ bedeutet $5 + (7 \cdot 9) - (3 \cdot 2) = 5 + 63 - 6$.

Ist dagegen 5 um das Produkt aus 7, $9 - 3$ und 2 zu vermehren, so ist $5 + 7 \cdot (9 - 3) \cdot 2$ zu setzen mit der Bedeutung:

$$5 + 7 \cdot 6 \cdot 2 = 5 + 84.$$

§. 11. Multiplicationssätze.

1. Da der Multiplicator die Anzahl der Summanden angiebt (s. §. 10, 1 und §. 1, 15 u. 16), so kann er nur eine unbenannte Zahl sein. Es kann also nicht $8\,\mathcal{M} \cdot 3\,\mathcal{M}$ heifsen, sondern nur $8\,\mathcal{M} \cdot 3$ (entstanden aus $8\,\mathcal{M} + 8\,\mathcal{M} + 8\,\mathcal{M}$). Die Anzahl der Summanden kann nicht $3\,\mathcal{M}$, sondern nur 3 sein.

2. Der Entstehung der Multiplication aus der Addition zufolge ist: $1 + 1 + 1 + 1 = 1 . 4$.

Die Summe von 4 Einheiten giebt aber auch (nach §. 1, 11—13) die Zahl 4, oder es ist:

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Aus beiden Gleichungen folgt (nach §. 3, 2):

$$1 \cdot 4 = 4.$$

Eben so ist $1 \cdot 8 = 8$, $1 \cdot 1 = 1$; allgemein: $1 \cdot a = a$.

Anstatt $\overset{1}{\smile}\!\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!\!1 + \overset{3}{\smile}\!\!\!1 + \overset{4}{\smile}\!\!\!1 = 1 \cdot 4$ kann mithin auch

$\overset{1}{\smile}\!\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!\!1 + \overset{3}{\smile}\!\!\!1 + \overset{4}{\smile}\!\!\!1 = 4$ gesetzt werden.

Allgemein:

Es ist: $\overset{1}{\smile}\!\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!\!1 + \overset{3}{\smile}\!\!\!1 + \ldots\ldots + \overset{a}{\smile}\!\!\!1 = a.$

(Vergl. das letzte Beispiel in Satz 3, II.)

Umgekehrt ist: $4 = 1 \cdot 4$; allgemein: $a = 1 \cdot a$.

$$a = \overset{1}{\smile}\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!1 + \overset{3}{\smile}\!\!1 + \ldots\ldots + \overset{a}{\smile}\!\!1.$$

3. Die Anordnung zweier Faktoren ist beliebig.

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, allgemein: $a \cdot b = b \cdot a$.

Beweis.

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{matrix}$$

3 Reihen, jede mit 4 Einheiten $= 3 \cdot 4$. Aber auch:
4 (senkrechte) Reihen, jede mit 3 Einheiten $= 4 . 3$. Folglich:

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3.$$

Allgemeiner Beweis.

$$a \cdot b = \overset{1}{\smile}\!\!a + \overset{2}{\smile}\!\!a + \overset{3}{\smile}\!\!a + \ldots\ldots + \overset{b}{\smile}\!\!a \text{ (s. §. 10, 3); d. i.}$$

$$a \cdot b = \begin{cases} \overset{1}{\smile}\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!1 + \overset{3}{\smile}\!\!1 + \ldots\ldots + \overset{a}{\smile}\!\!1 \text{ (jenes erste } a) \\ + \overset{1}{\smile}\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!1 + \overset{3}{\smile}\!\!1 + \ldots\ldots + \overset{a}{\smile}\!\!1 \text{ (jenes zweite } a) \\ + \overset{1}{\smile}\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!1 + \overset{3}{\smile}\!\!1 + \ldots\ldots + \overset{a}{\smile}\!\!1 \text{ (jenes dritte } a) \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ + \overset{1}{\smile}\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!1 + \overset{3}{\smile}\!\!1 + \ldots\ldots + \overset{a}{\smile}\!\!1 \text{ (jenes } b^{\text{te}}\ a). \end{cases}$$

Addiert man zuerst die mit $\overset{1}{\smile}$ bezeichneten, senkrecht unter einander stehenden Einheiten, deren Anzahl $= b$, dann die mit $\overset{2}{\smile}$ bezeichneten Einheiten, deren Anzahl $= b$, u. s. w., so ergiebt sich:

$$a \cdot b = \begin{cases} \overset{1}{\smile}\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!1 + \ldots\ldots + \overset{b}{\smile}\!\!1 \text{ (die mit } \overset{1}{\smile} \text{ bezeichneten Einheiten)} \\ + \overset{1}{\smile}\!\!1 + \overset{2}{\smile}\!\!1 + \ldots\ldots + \overset{b}{\smile}\!\!1 \text{ (die mit } \overset{2}{\smile} \text{ bezeichneten Einheiten)} \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ + 1 + 1 + \ldots\ldots + \overset{b}{\smile}\!\!1 \text{ (die mit } \overset{a}{\smile} \text{ bezeichneten Einheiten).} \end{cases}$$

Die erste Zeile des vorstehenden Ausdrucks giebt (nach Satz 2) die Zahl b, also das erste b oder $\overset{1}{\smile}\!\!b$, die 2. Zeile $= b$, also das zweite b oder $\overset{2}{\smile}\!\!b$, die letzte Zeile das a^{te} b oder $\overset{a}{\smile}\!\!b$; daher:

$$a \cdot b = \overset{1}{\smile}{b} + \overset{2}{b} + \overset{3}{b} + \ldots\ldots + \overset{a}{b},$$

d. i. nach §. 10, 3, I u. II: $ab = ba$.

Beispiele: $x \cdot 3 = 3 \cdot x = 3x$;

$(a + b) \cdot 2 = 2 \cdot (a + b) = 2(a + b)$.

Anmerkung. Da $8 . 3 = 3 . 8$, so ist $\overset{1}{8} + \overset{2}{8} + \overset{3}{8}$ nicht blofs $= 8 . 3$, sondern auch $= 3 . 8$. Man kann also den letzten Index oder Multiplicator, den wir bisher nur als 2. Faktor annahmen (s. §. 10, 3, II), nun auch als 1. Faktor setzen. Es ist mithin:

$\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots\ldots + \overset{n}{a}$ ebensowohl na als an.

Umgekehrt: $5 \cdot 4$ ist ebensowohl $\overset{1}{5} + \overset{2}{5} + \overset{3}{5} + \overset{4}{5}$, als auch:

$$\overset{1}{4} + \overset{2}{4} + \overset{3}{4} + \overset{4}{4} + \overset{5}{4}.$$

4. $(5 + 4) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3$. Allgemein:

$(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Um einen mehrteiligen Ausdruck zu multiplicieren, hat man jeden Teil zu multiplicieren.

Beweis.

$$(5 + 4) \cdot 3 = (5 \overset{1}{+} 4) + (5 \overset{2}{+} 4) + (5 \overset{3}{+} 4)$$
$$= \overset{1}{5} + \overset{1}{4} + \overset{2}{5} + \overset{2}{4} + \overset{3}{5} + \overset{3}{4}$$
$$= \overset{1}{5} + \overset{2}{5} + \overset{3}{5} + \overset{1}{4} + \overset{2}{4} + \overset{3}{4}, \text{ oder:}$$
$$(5 + 4) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3.$$

Allgemeiner Beweis.

$$(a + b) \cdot c = (a \overset{1}{+} b) + (a \overset{2}{+} b) + \ldots\ldots + (a \overset{c}{+} b)$$
$$= \overset{1}{a} + \overset{1}{b} + \overset{2}{a} + \overset{2}{b} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} + \overset{c}{b}$$
$$= \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} + \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \ldots\ldots + \overset{c}{b}$$
$$= ac + bc.$$

Nach dem 3. Satze können vorstehende Ausdrücke auch geschrieben werden: $3(5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$;

$c(a + b) = c \cdot a + c \cdot b$.

Beispiel. $a - b(c + d)$? Da von a das ganze Produkt $b(c + d)$ subtrahiert werden soll, so hat man sich zu denken:

$$a - [b(c + d)].$$

Dies aber ist nach vorstehendem Satze:

$$= a - [bc + bd] = a - bc - bd \text{ (s. §. 9, 16).}$$

5. $(9-5)\cdot 3 = 9\cdot 3 - 5\cdot 3$ oder $3\cdot(9-5) = 3\cdot 9 - 3\cdot 5$;
allgemein: $(a-b)\cdot c = ac - bc$, oder (s. 3. Satz):
$c(a-b) = ca - cb$.

Satz 4 gilt also auch für substraktive Zahlen.

Beweis.

$$(a-b)c = (\overset{1}{\smile}{a-b}) + (\overset{2}{\smile}{a-b}) + \ldots\ldots + (\overset{c}{\smile}{a-b})$$
$$= \overset{1}{a} - \overset{1}{b} + \overset{2}{a} - \overset{2}{b} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} - \overset{c}{b}$$
$$= \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} - \overset{1}{b} - \overset{2}{b} - \overset{3}{b} \ldots\ldots - \overset{c}{b}$$
$$= (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots\ldots + \overset{c}{a}) - (\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \ldots\ldots + \overset{c}{b}) \text{ (s. §. 9,17)}$$
$$= ac - bc.$$

Beispiel. (Vergl. das Beispiel zum 4. Satze!)
$$a-(b-c)d = a - [(b-c)d] = a - [bd - cd]$$
$$= a - bd + cd \text{ (s. §. 9, 18).}$$

6. $7\cdot 3 + 5\cdot 3 = (7+5)\cdot 3$ oder $7\cdot 3 + 5\cdot 3 = 3\cdot(7+5)$.
Allgemein: $ac + bc = (a+b)c$, oder (s. 3. Satz):
$ac + bc = c(a+b)$.

Ist eine Summe von Produkten gegeben, von welchen jedes denselben Faktor (3 in den ersten, c in den letzten Gleichungen) enthält, so kann man diesen „gemeinsamen Faktor“ aus jedem Produkt entfernen, den zurückbleibenden Ausdruck ($7+5$ oder $a+b$) in Klammer setzen und diese Klammer wieder mit jenem Faktor multiplicieren. Man sagt alsdann: 3 oder c ist ausgehoben (herausgestellt, abgesondert, herausgeschrieben, ausgeschieden, ausgeklammert) worden.

Beweis.
$$ac + bc = (ac) + (bc)$$
$$= \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} + \overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \ldots\ldots + \overset{c}{b}$$
$$= \overset{1}{a} + \overset{1}{b} + \overset{2}{a} + \overset{2}{b} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} + \overset{c}{b}$$
$$= (\overset{1}{a+b}) + (\overset{2}{a+b}) + \ldots\ldots + (\overset{c}{a+b})$$
$$= (a+b)c \text{ oder } = c(a+b).$$

Anmerkung. Weiter unten soll gezeigt werden, warum $(a+b)c$ nicht als Umkehrung von $ac+bc$ aufgefafst werden darf.

Beispiele.
$$9\cdot 13 + 8\cdot 13 + 3\cdot 13 = (9+8+3)\cdot 13 = 20\cdot 13;$$
$$38\cdot 47 + 38\cdot 37 + 38\cdot 16 = 38.(47+37+16) = 38\cdot 100;$$
$$8\cdot x + 5\cdot x = (8+5)\cdot x = 13\cdot x = 13x;$$
$$x + a\cdot x + b\cdot x?$$

Aus dem ersten x ist zunächst (nach Satz 2) ein Produkt herzustellen:

$$= 1 \cdot x + a \cdot x + b \cdot x = (1 + a + b)\, x.$$

7. $a\,c - b\,c = (a - b)\,c$, oder $a\,c - b\,c = c \cdot (a - b)$.

Beweis.

$$(a\,c) - (b\,c) = (\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots\ldots + \overset{c}{a}) - (\overset{1}{b} + \overset{2}{b} + \ldots\ldots + \overset{c}{b})$$

$$= \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} - \overset{1}{b} - \overset{2}{b} \ldots\ldots - \overset{c}{b}$$

$$= \overset{1}{a} - \overset{1}{b} + \overset{2}{a} - \overset{2}{b} + \ldots\ldots + \overset{c}{a} - \overset{c}{b}$$

$$= (a \overset{1}{-} b) + (a \overset{2}{-} b) + \ldots\ldots + (a \overset{c}{-} b)$$

$$= (a - b)\, c \text{ oder } c\,(a - b).$$

Beispiele.

$$a\,a - a\,b - a\,c = a\,(a - b - c);$$

$$7\,x - 4\,x = (7 - 4)\,x = 3\,x;$$

$$a\,c + c\,d - c = a\,c + c\,d - 1 \cdot c = (a + d - 1) \cdot c.$$

8. Um das Produkt $6 \cdot 5$ mit 4 zu multiplicieren, also $(6 \cdot 5) \cdot 4$ zu berechnen, könnte man zunächst das Produkt $6 \cdot 5$ durch eine Zahl ausdrücken, $= 30$, und dann $30 \cdot 4 = 120$ rechnen. Will man jedoch, wie es oft geschieht, die ursprüngliche Produktform beibehalten, so darf man

bei der Multiplication eines Produkts nur **einen** der Faktoren multiplicieren.

Um daher — s. das vorstehende Beisp. — das Produkt $(6 \cdot 5)$ mit 4 zu multiplicieren, müſste man entweder den 1. Faktor 6 mit 4 multiplicieren und 5 unverändert lassen, oder man lieſse 6 unverändert und multiplicierte den 2. Faktor 5 mit 4. Geschrieben:

$$(6 \cdot 5) \cdot 4 = (6 \cdot 4) \cdot 5 = 24 \cdot 5, \text{ oder auch}$$

$$= 6 \cdot (5 \cdot 4) = 6 \cdot 20$$

(übereinstimmend mit dem schon oben gefundenen Produkt 120).

Allgemein: $(a \cdot b)\ c = (a \cdot c) \cdot b$ oder auch $= a \cdot (b \cdot c)$.

Die Multiplication eines Produktes ist mithin nicht mit der Multiplication eines mehrteiligen Ausdrucks zu verwechseln, bei welcher (s. 4. Satz) jeder Teil zu multiplicieren ist:

$$(6 + 5) \cdot 4 = 6 \cdot 4 + 5 \cdot 4.$$

Beweis.

$$(6 \cdot 5) \cdot 4 = 6 \overset{1}{\cdot} 5 + 6 \overset{2}{\cdot} 5 + 6 \overset{3}{\cdot} 5 + 6 \overset{4}{\cdot} 5$$

Diese Summe aber ist nach dem 6. Satze entweder:

$$= (\overset{1}{6} + \overset{2}{6} + \overset{3}{6} + \overset{4}{6}) \cdot 5 = (6 \cdot 4) \cdot 5, \text{ oder:}$$

$$= 6 \cdot (\overset{1}{5} + \overset{2}{5} + \overset{3}{5} + \overset{4}{5}) = 6 \cdot (5 \cdot 4).$$

Beispiele: 5 mit $(6 \cdot 2)$ multipliciert $= 30 \cdot 2$ oder $= 6 \cdot 10$, nicht aber $= 30 \cdot 10$.

[$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}$ mit 2 multipliciert giebt entweder:

$$(3\tfrac{1}{2} \cdot 2) \cdot 4\tfrac{1}{2} = 7 \cdot 4\tfrac{1}{2}, \text{ oder:}$$
$$3\tfrac{1}{2} \cdot (4\tfrac{1}{2} \cdot 2) = 3\tfrac{1}{2} \cdot 9, \text{ nicht aber } = 7 \cdot 9].$$

1. Zusatz. Es ist also $(6 \cdot 5) \cdot 4 = (6 \cdot 4) \cdot 5 = 6 \cdot (5 \cdot 4)$. Diese Ausdrücke aber sind nach dem 3. Satze:

$$= (5 \cdot 6) \cdot 4 = (4 \cdot 6) \cdot 5 = 6 \cdot (4 \cdot 5)$$

Diese sechs Ausdrücke sind ferner nach demselben 3. Satze:

$$= 4 \cdot (6 \cdot 5) = 5 \cdot (6 \cdot 4) = (5 \cdot 4) \cdot 6$$
$$= 4 \cdot (5 \cdot 6) = 5 \cdot (6 \cdot 4) = (4 \cdot 5) \cdot 6.$$

Vorstehende 12 Ausdrücke sind also alle untereinander gleich.

2. Zusatz. Soll $6 \cdot 5 \cdot 4$ berechnet werden, so erhielte man, wenn man zuerst 2 beliebige Faktoren multiplicierte, das erhaltene Produkt aber alsdann mit dem 3. Faktor, entweder $(6 \cdot 5) \cdot 4$ oder $6 \cdot (5 \cdot 4)$ u. s. w. Da aber alle diese Ausdrücke dem 1. Zus. zufolge einander gleich sind, so kann kein Fehler entstehen, wenn man statt $(6 \cdot 5) \cdot 4$ oder $6 \cdot (5 \cdot 4)$ einfach $6 \cdot 5 \cdot 4$ schreibt. Allgemein:

$(a\,b)\,c = a\,b\,c$; $a\,(b\,c) = a\,b\,c$. Oder:

Die mehrere Faktoren eines Produkts einschliefsende Parenthese kann beliebig weggelassen werden.

3. Zusatz. Damit geht $(6 \cdot 5) \cdot 4 = (6 \cdot 4) \cdot 5 = 5 . (6 \cdot 4)$ u. s. w. (s. den 1. Zus.) über in $6 \cdot 5 \cdot 4 = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 6 \cdot 4$ u. s. w.; oder:

Die Anordnung von mehr als zwei Faktoren ist beliebig.

4. Zusatz. Umgekehrt: $a\,b\,c = a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$; oder:

Mehrere Faktoren eines Produkts können beliebig in Parenthese gestellt werden.

5. Zusatz. Nun ist auch:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5) \cdot 7 \text{ (s. 4. Zus.)} = 6 \cdot 20 \cdot 7 = (6 \cdot 20) \cdot 7$$
$$= 120 \cdot 7 = 840, \text{ oder:}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \text{ (s. 3. Zus.)} = (2 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 3) \cdot 4$$
$$= 10 \cdot 21 \cdot 4 = (10 \cdot 21) \cdot 4 = 210 \cdot 4 = 840.$$

Um also ein Produkt zu berechnen, kann man immer je 2 beliebige Faktoren in eine Zahl vereinigen.

6. Zusatz. Es ist $(6 \cdot 5) \cdot 4 = 6 \cdot (5 \cdot 4)$ (s. 1. u. 2. Zus.).

Anstatt also irgend eine Zahl (hier 6) mit 5 und das Produkt (30) alsdann mit 4 zu multiplicieren, kann man jene Zahl (6) sogleich mit dem Produkt aus 5 und 4, d. i. mit 20 multiplicieren. Allgemein:

Anstatt mit mehreren Zahlen der Reihe nach zu multiplicieren, kann man sogleich mit ihrem Produkt multiplicieren.

7. Zusatz. Ferner ist $6 \cdot (5 \cdot 4) = (6 \cdot 5) \cdot 4$ (s. 1. u. 2. Zus.).

Anstatt also eine Zahl (6) mit 20, d. i. mit $(5 \cdot 4)$, zu multi-

plicieren, kann man sie zuerst mit 5 und das erhaltene Produkt alsdann mit 4 multiplicieren. Allgemein:

Anstatt mit einer Zahl zu multiplicieren, kann man dieselbe in Faktoren zerlegen und mit diesen einzeln der Reihe nach multiplicieren.

Beispiel: $5137 \cdot 12?$

$$\begin{array}{r} 5137 \cdot 3 \\ \hline 15411 \cdot 4 \\ \hline = 61644 \end{array}$$

8. Zusatz. $2\,\mathcal{M} \cdot 3\,\mathcal{M} \cdot 4 \cdot 5$ ist unmöglich, weil $(2\,\mathcal{M} \cdot 3\,\mathcal{M}) \cdot 4 \cdot 5$ unmöglich ist (s. 1. Satz). Oder:

Nur ein Faktor eines Produkts kann eine benannte Zahl sein.

9. Zusatz.

Vergleicht man $ab = (ab)$ mit

$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$, so ergiebt sich:

So viel mal so grofs ein Faktor, so viel mal so grofs das Produkt.

9. Setzt man in $m \cdot (c + d) = mc + md$ (s. 4. Satz) an die Stelle von m: $a + b$, so entsteht:

$$\begin{aligned}(a + b)(c + d) &= (a + b)c + (a + b)d, \text{ d. i. (4. Satz)} \\ &= ac + bc + ad + bd.\end{aligned}$$

Um also einen mehrteiligen Ausdruck mit einem mehrteiligen zu multiplicieren, hat man jeden Teil des einen mit jedem Teile des andern zu multiplicieren.

Beispiel:

$$\begin{aligned}34 \cdot 12 = (30 + 4)(10 + 2) &= 30 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 30 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\ &= 300 + 40 + 60 + 8 = 408.\end{aligned}$$

1. Zusatz. $m(c - d) = mc - md$ geht mit $m = a + b$ über in

$$\begin{aligned}(a + b)(c - d) &= (a + b)c - (a + b)d \\ &= ac + bc - [(a + b) \cdot d] \\ &= ac + bc - [ad + bd] \\ &= ac + bc - ad - bd.\end{aligned}$$

2. Zusatz. $m(c + d) = mc + md$ geht mit $m = a - b$ über in

$$\begin{aligned}(a - b)(c + d) &= (a - b)c + (a - b)d \\ &= ac - bc + ad - bd.\end{aligned}$$

3. Zusatz. $m(c - d) = mc - md$ geht mit $m = a - b$ über in

$$\begin{aligned}(a - b)(c - d) &= (a - b)c - (a - b)d \\ &= ac - bc - [(a - b)d] \\ &= ac - bc - [ad - bd] \\ &= ac - bc - ad + bd.\end{aligned}$$

10. Gleiches mit Gleichem multipliciert, giebt Gleiches.

Ist $\qquad A = B$ (Voraussetzung)

so ist auch $AC = BC$ (Behauptung),

oder auch geschrieben:
$$\left.\begin{array}{l} A = B \\ C = C \end{array}\right\}\text{(Voraussetzung)}$$
$$\overline{A \cdot C = B \cdot C}\ \text{(Behauptung).}$$

Beweis. $A \cdot C = A \cdot C$ (s. 1. Axiom) geht, wenn man an die Stelle des A der rechten Seite das ihm gleiche B (s. Voraussetzung) setzt, über in: $AC = BC$.

Zusatz. Ist
$$\begin{array}{r} A = B \\ \text{und } C = D \\ \hline A \cdot C = B \cdot D. \end{array}$$
(Vergl. §. 7, 9, Zus.).

§. 12. Division.

1. Die Division ist die Umkehrung der Multiplication (also die 2. indirekte Species). Sie sucht aus dem Produkt und einem der beiden Faktoren desselben den andern Faktor. [Genetische Definition!]

In Bezug auf $8 \cdot 3 = 24$ würde also die Division

I. entweder aus dem Produkt 24 und einem der beiden Faktoren, z. B. 3, den andern Faktor 8 suchen. Geschrieben:

Gegeben Gesucht
$$\underbrace{\underset{\text{Dividend}}{24} : \underset{\text{Divisor}}{8}}_{\text{Quotient.}} = \underset{\text{Quotient}}{3}$$

Gelesen: „24 dividiert durch 8"
oder: „der Quotient aus 24 und 8".

oder auch geschrieben:
$$\underset{\text{Bruch, Quot.}}{\frac{24}{8}} = \underset{\text{Quot.}}{3}$$

Gelesen: „24 Achtel gleich 3",
oder: „24 durch 8",
oder: „Quotient aus 24 und 8".

II. oder es würde die Division aus dem Produkt $8 \cdot 3$ und einem der beiden Faktoren 8 (3) den andern Faktor 3 (8) suchen:
$$\underset{\text{Divid.}}{(8 \cdot 3)} : \underset{\text{Divisor}}{8} = \underset{\text{Quot.}}{3} \quad \text{oder} \quad \underset{\text{Divid.}}{(8 \cdot 3)} : \underset{\text{Divisor}}{3} = \underset{\text{Quot.}}{8}$$

Zusatz. Ist mithin die Multiplicationsgleichung richtig, so mufs das Produkt durch den einen Faktor dividiert, den andern Faktor geben. Ist z. B. $8 \cdot 3 = 24$ richtig, so mufs $24 : 3 = 8$ und $24 : 8 = 3$ sein.

2. Das Produkt (24, siehe 1, I) wird also zum Dividend, der gegebene Faktor (8) zum Divisor, der gesuchte Faktor (3) zum Quotient.

3. Realdefinitionen:

Dividieren heifst eine Zahl (3) suchen, die mit dem Divisor (8) multipliciert, den Dividend (24) giebt.

Quotient ist die Zahl, welche mit dem Divisor multipliciert, den Dividend giebt.

24 : 8 der formelle oder theoretische Quotient, 3 der materielle oder praktische Quotient.

Bruch (gebrochene Zahl) ist der als eine Zahl gedachte und mit dem Bruchstrich geschriebene Quotient zweier Zahlen. [Also nicht „Teil eines Ganzen“]. Mithin bedeutet $\frac{7}{9}$ so viel als (7 : 9), vergl. §. 6, 2, II. Die beiden Zahlen (die Glieder) des Bruches nennt man gewöhnlich Zähler (7 im vorstehenden Beispiel) und Nenner (9). Statt derselben bedient man sich jedoch auch (namentlich bei Buchstabenbrüchen) der allgemeinern Ausdrücke: Dividend und Divisor. In $\frac{a}{b}$ (lies „a durch b“) ist a der Dividend oder Zähler, b der Divisor oder Nenner.

Anmerkung. Für die Division existieren also 2 Zeichen: das Colon und der Bruchstrich. Beide können zwar als vollkommen identisch benutzt werden, man denkt sich jedoch, wie schon bemerkt, den Bruch stets als eine einzige Zahl, so dafs $\frac{24}{8}$ für (24 : 8) steht.

4. Mit Rücksicht auf §. 10, 3, IV ist $10 - 6 : 2$ so viel als $10 - (6 : 2) = 10 - 3 = 7$. Also auch $10 - 6 : 2 = 10 - \frac{6}{2}$.

$12 : 3 + 1$ ist so viel als $(12 : 3) + 1$ oder $\frac{12}{3} + 1 = 4 + 1 = 5$.

Soll jedoch ein mehrteiliger Ausdruck dividiert werden, oder soll irgend eine Zahl durch einen mehrteiligen Ausdruck dividiert werden, so ist der mehrteilige Ausdruck entweder in Parenthese zu setzen, oder er ist durch den Bruchstrich zu vereinigen. Soll z. B. $10 - 6$ durch 2 dividiert werden, so ist $(10 - 6) : 2$ oder $\frac{10 - 6}{2}$ zu schreiben.

12 durch $3 + 1$ dividiert $= 12 : (3 + 1)$ oder $\frac{12}{3 + 1}$.

$1 + 10 : 2 - 6 : 3$ bedeutet $1 + (10 : 2) - (6 : 3)$ oder $1 + \frac{10}{2} - \frac{6}{3}$ $= 1 + 5 - 2 = 4$, nicht aber $\frac{1 + 10}{2} - \frac{6}{3}$.

5. Da die Division aus dem Produkt und einem beliebigen Faktor den andern Faktor sucht, so ergeben sich aus $8 \mathcal{M} \cdot 3 = 24 \mathcal{M}$ folgende Divisionen:

I. $24\,\mathcal{M}:3=8\,\mathcal{M}$. Ist also der Divisor unbenannt, so ist der Quotient gleichartig mit dem Dividend und drückt einen Teil aus. 8 ℳ ist der „dritte Teil“ von 24 ℳ.

II. $24\,\mathcal{M}:8\,\mathcal{M}=3$. Ist mithin der Divisor gleichartig mit dem Dividend, so ist der Quotient unbenannt und drückt ein Enthaltensein oder Messen aus. 8 ℳ ist in 24 ℳ 3mal enthalten.

Der Quotient aus zwei gleichartigen Gröfsen wird Verhältnis genannt. $24\,\mathcal{M}:8\,\mathcal{M}$, $\frac{12 \text{ Meter}}{18 \text{ Meter}}$ sind Verhältnisse.

Die unbenannte Zahl (3 oder $\frac{24}{8}$ im vorletzten Beispiel), welche dem Verhältnis ($24\,\mathcal{M}:8\,\mathcal{M}$) gleich ist, heifst Exponent des Verhältnisses.

Das Messen untersucht, wie oft der Divisor (8 ℳ), der dann auch Mafs heifst, im Dividend (24 ℳ, die zu messende Gröfse) enthalten ist. Die als Resultat erhaltene unbenannte Zahl (3) heifst dann auch Mafszahl.

Sind Dividend und Divisor unbenannt (z. B. $24:8=3$), so kann man sowohl Teil als Enthaltensein annehmen.

6. $12\,\mathcal{M}-4\,\mathcal{M}-4\,\mathcal{M}-4\,\mathcal{M}=0$. Von 12 ℳ läfst sich also 4 ℳ 3mal abziehen. Geschrieben: $12\,\mathcal{M}:4\,\mathcal{M}=3$. Die Division könnte mithin auch als eine „abgekürzte Subtraktion mit gleichen Subtrahenden“ angesehen werden. Diese Erklärung würde aber nur dem Messen oder Enthaltensein genügen.

7. Um 2 Zahlen zu vergleichen, hat man bei der Addition und Subtraktion stets den Comparativ (s. §. 8, 4), bei der Multiplication und Division stets „mal“ mit dem Positiv anzuwenden. Es mufs daher heifsen: „24 ist 3mal so grofs als 8“ (nicht „24 ist 3mal gröfser als 8“); „A hat 5mal so viel als B“; „So viel mal so grofs ein Faktor, so viel mal so grofs das Produkt“; „Der Mond ist 50mal so klein als die Erde“ [nicht: „50mal kleiner“]; „B hat 5mal so wenig als A“; „So viel mal so klein ein Faktor, so viel mal so klein das Produkt“.

Die Division beantwortet auch die Frage, wie viel mal so grofs oder so klein eine Zahl ist als eine andere. Beispiel: Wie viel mal so grofs ist 30 als 5? Antwort: $30:5=6$mal so grofs. Wie viel mal so klein ist 3 als 21? Antwort: $21:3=7$mal so klein.

8 und noch einmal 8 ist 16; daher: 16 ist noch einmal so grofs als 8. „Noch einmal“ ist demnach gleichbedeutend mit „2mal“, „noch 2mal“ gleichbedeutend mit „3mal“. In dieser Zusammenstellung bedeutet mithin „noch“ so viel als „1 +“. Beispiele: Welche Zahl ist noch 8mal so grofs als 10? Antwort: $10\cdot(1+8)=10\cdot9=90$.

Welche Zahl ist noch 5mal so klein als 60? Antwort:

$$60:(1+5)=60:6=10.$$

§. 13. Divisionssätze.

1. Die Divisionsgleichung ist richtig, wenn die zugehörige Multiplicationsgleichung richtig ist, wenn also

der gesuchte Faktor × der gegebene Faktor = dem Produkt,
oder der gegebene Faktor × der gesuchte Faktor = dem Produkt
ist, folglich wenn

Quotient × Divisor = Dividend,
oder Divisor × Quotient = Dividend
ist. (Vergl. §. 9, 1.)

Beispiel. $75:3 = 25$ ist richtig, weil Quot. × Divisor = $25 \cdot 3 = 75$ und dieses Resultat dem Dividend gleich ist. (Probe für die Richtigkeit der Division.)

Anmerkung. Bei den Beweisen für die Divisionssätze mag in der Folge „Dividend, Divisor, Quotient" mit „Dd., Dsr., Q." abgekürzt werden.

2. $(8 \cdot 3):8 = 3$ und $(8 \cdot 3):3 = 8$, oder

$$\frac{8 \cdot 3}{8} = 3 \text{ und } \frac{8 \cdot 3}{3} = 8. \text{ Allgemein:}$$

$$(ab):a = b \text{ und } (ab):b = a, \text{ d. i. auch:}$$

$$\frac{ab}{a} = b, \quad \frac{ab}{b} = a. \text{ Oder:}$$

Ein aus 2 Faktoren bestehendes Produkt durch einen der Faktoren dividiert, giebt den andern Faktor.

Diese Sätze sind schon unmittelbar aus der genetischen Definition der Division abgeleitet worden (§. 12, 1, II), sie können aber auch nach vorstehendem 1. Satze bewiesen werden. Denn man kann

in $(a \cdot b):a = b$
Dd. Dsr. Q. unterscheiden.

Da nun Dsr. × Q. $= a \cdot b =$ Dd., so ist der Satz richtig.

3. Umkehrung: $3 = \frac{8 \cdot 3}{8}$, $8 = \frac{8 \cdot 3}{3}$; allgemein:

$$b = \frac{ab}{a}, \quad a = \frac{ab}{b}.$$

Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer beliebigen Zahl multipliciert und dann das Produkt durch diese Zahl wieder dividiert.

Mittelst dieses Satzes verwandelt man eine ganze Zahl in einen Bruch mit bestimmtem Nenner. Um z. B. 7 in Fünftel zu verwandeln:

$$7 = \frac{7 \cdot 5}{5} = \frac{35}{5}.$$

4. Aus $8 \cdot 3 = 24$ folgt sowohl $24:8 = 3$, als auch $24:3 = 8$. Mithin kann aus $24:8 = 3$ auch $24:3 = 8$ gebildet werden. Oder:

I. Man kann den Quotient mit dem Divisor vertauschen.

II. Der Dividend durch den Quotient dividiert, giebt den Divisor.

Aus $a:b = \frac{a}{b}$ folgt daher $a:\frac{a}{b} = b$; z. B. $5:\frac{5}{7} = 7$.

5. Ist die Divisionsgleichung richtig, so mufs auch

Quot. $\times$ Dsr. = Dividend

und Dsr. $\times$ Quot. = Dividend sein.

Ist daher $24:8 = 3$ richtig, so mufs auch $3 \cdot 8 = 24$ sein. Die Multiplication ist also richtig, wenn das Produkt durch den einen Faktor dividiert, den andern Faktor giebt. (Probe für die Richtigkeit der Multiplication.)

6. $8:1 = 8$ oder $\frac{8}{1} = 8$; allgemein: $\frac{a}{1} = a$. Oder:

Eine Zahl durch 1 dividiert, giebt jene Zahl selbst wieder.

Beweis. In $8:1 = 8$ unterscheide man:

Dd. Dsr. Q.

Da nun Q. $\times$ Dsr. $= 8 \cdot 1 = 8 =$ Dd., so ist der Satz richtig.

Beispiele. $\frac{a+b}{1} = a + b$.

$12 - \frac{5+a}{1} = ?$ Da der Bruchstrich die Stelle der Parenthese vertritt (s. §. 12, 3) und hier demselben ein Minuszeichen vorausgeht, so ist auch statt des wegfallenden Bruchstrichs unbedingt eine Parenthese zu setzen. Folglich $= 12 - (5 + a) = 12 - 5 - a = 7 - a$. Dagegen kann $12 + \frac{5+a}{1}$ sogleich in $12 + 5 + a = 17 + a$ verwandelt werden (siehe §. 9, 19, Anmerk.).

7. Umkehrung: $8 = \frac{8}{1}$, $a = \frac{a}{1}$.

Mittelst dieses Satzes verwandelt man eine ganze Zahl auf einfachste Weise in Bruchform.

8. $8:8 = 1$, $\frac{8}{8} = 1$; allgemein: $a:a = 1$, $\frac{a}{a} = 1$. Oder:

Eine Zahl durch sich selbst dividiert, giebt 1.

Beweis. Q. $\times$ Dsr. $= 1 \cdot 8 = 8 =$ Dd.!

Beispiele.

$$\frac{a-b+c}{a-b+c} = 1; \quad \frac{83}{149} : \frac{83}{149} = 1; \quad \frac{x+a}{x-b} : \frac{x+a}{x-b} = 1.$$

9. Umkehrung: $1 = \frac{8}{8}$, $1 = \frac{a}{a}$.

Mittelst dieses Satzes verwandelt man 1 in einen Bruch mit gegebenem Nenner. Soll z. B. 1 in Fünftel verwandelt werden, so ist $1 = \frac{5}{5}$ zu setzen.

10. Da die Gleichung $3:8 = (3:8)$ oder (siehe §. 12, 3)

$$3:8 = \frac{3}{8}$$

unbedingt (apodiktisch) richtig ist, so mufs (vergl. auch den 5. Satz und §. 9, 5. Satz) Dsr. × Quot. = Dd.
und Quot. × Dsr. = Dd. sein, d. i.

$$8 \cdot \frac{3}{8} = 3 \text{ und } \frac{3}{8} \cdot 8 = 3,$$

allgemein:
$$b \cdot \frac{a}{b} = a \text{ oder } b \cdot (a:b) = a,$$

$$\frac{a}{b} \cdot b = a \text{ oder } (a:b) \cdot b = a. \quad \text{Oder:}$$

Ein Bruch mit seinem Nenner multipliciert, giebt den Zähler.

Beispiele. $7 \cdot \frac{2}{7} = 2$ (also unmittelbar und nicht etwa nach einem spätern Satze $7 \cdot \frac{2}{7} = \frac{14}{7} = 2$);

$$x \cdot \frac{a-b}{x} = a - b;$$

$$\left(\frac{3}{a} + \frac{5}{a}\right) \cdot a = \frac{3}{a} \cdot a + \frac{5}{a} \cdot a \text{ (s. §. 10, 4) } = 3 + 5 = 8;$$

$$10 - \frac{4+a}{a+b} \cdot (a+b) = 10 - (4+a) = 10 - 4 - a = 6 - a.$$

1. Anmerkung. Tritt nach einem Minuszeichen, wie im vorstehenden Beispiele, an die Stelle eines Bruches oder eines einen Bruch enthaltenden Ausdrucks der mehrteilige Zähler allein, so ist derselbe (übereinstimmend mit §. 13, 6; §. 6, 2 II; §. 9, 19 Anm.) in Parenthese zu setzen.

2. Anmerkung. Es ist offenbar unnötig, die Divisionssätze mit derselben Ausführlichkeit wie die Subtraktionssätze zu behandeln. Hier mag aber doch gezeigt werden, dafs statt $(a \,.\, b) : b = a$ u. s. w. einfach $a \,.\, b : b$ gesetzt werden kann. Berechnet man nämlich $a \,.\, b : b$ oder $a : b \,.\, b$ oder $b \,.\, a : b$ oder $b : b \,.\, a$ in beliebiger Ordnung, so könnte dies geschehen:

1. als $(a \,.\, b) : b = a$,
2. als $(a : b) \,.\, b = a$,
3. als $b \,.\, (a : b) = a$,
4. als $a \,.\, (b : b) = a \,.\, 1 = a$,
5. als $(b : b) \,.\, a = 1 \,.\, a = a$.

Da aber immer dasselbe Resultat, nämlich a, erscheint, so kann kein Fehler entstehen, wenn die Parenthese weggelassen und nur geschrieben wird:

$$(A) \begin{cases} a \,.\, b : b = a, \\ a : b \,.\, b = a, \\ b \,.\, a : b = a, \\ b : b \,.\, a = a. \end{cases}$$

3. Anmerkung. Der in jeder indirekten Species aus der apodiktischen Gleichung sich ergebende Satz ist der wichtigste der betreffenden Species, für die Subtraktion $a - b + b = a$, für die Division $b \,.\, \frac{a}{b} = a$, da derselbe in der Theorie (bei Beweisen) und in der Praxis am häufigsten benutzt wird.

11. Umkehrung:

$$3 = 8 \cdot \frac{3}{8}, \text{ allgemein: } a = b \cdot \frac{a}{b}. \quad \text{Oder:}$$

Eine gegebene Zahl kann gleich einem Produkt aus einer andern (zweiten) Zahl und einem Quotient gesetzt werden, wenn man die gegebene Zahl zum Dividend und die 2. Zahl zum Divisor dieses Quotienten macht.

Beispiel.
$$5 = 3 \cdot \frac{5}{3}.$$

Aufgabe. Mit welcher Zahl ist 6 zu multiplicieren, damit man 24 erhält?

Auflösung:
$$24 = 6 \cdot \frac{24}{6} = 6 \cdot 4.$$

Mithin ist 6 mit 4 zu multiplicieren.

Zusatz. Kehrt man auch

$$8 \cdot 5 \cdot \frac{35}{5} = 8 \cdot 35, \text{ oder allgemein: } a \cdot b \cdot \frac{c}{b} = a \cdot c$$

um, so erhält man:
$$8 \cdot 35 = (8 \cdot 5) \cdot \frac{35}{5},$$

$$a \cdot c = (a\, b) \cdot \frac{c}{b}, \text{ oder:}$$

Ein Produkt bleibt unverändert, wenn man den einen Faktor mit einer beliebigen Zahl multipliciert, den andern durch dieselbe Zahl dividiert.

Beispiel. $8 \cdot 35$? Der erste Faktor mit 5 multipliciert, der zweite durch 5 dividiert $= 40 \cdot 7 = 280$.

12.
$$\frac{7+5}{3} = \frac{7}{3} + \frac{5}{3}; \text{ allgemein:}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Einen mehrteiligen Ausdruck dividiert man, indem man jeden einzelnen Teil dividiert.

Beweis. Man unterscheide in

$$\underset{\text{Dd.}}{(7+5)} : \underset{\text{Dsr.}}{3} = \underbrace{\frac{7}{3} + \frac{5}{3}}_{\text{Q.}}$$

Da nun

$$\text{Q.} \times \text{Dsr.} = \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{3}\right) \cdot 3 = \frac{7}{3} \cdot 3 + \frac{5}{3} \cdot 3 = 7 + 5 = \text{Dd.},$$

so ist der Satz richtig.

Zusatz. Der Satz gilt auch für eine Differenz:

$$\frac{7-5}{3} = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}, \text{ allgemein:}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Der Beweis ist derselbe wie vorher.

Anmerkung. Um in der Summe der Produkte $ab + ac$ den gemeinsamen Faktor a auszuheben, läfst man, wie in §. 11, 6 gezeigt worden ist, zunächst aus allen Produkten diesen Faktor weg. Läfst man aber in $ab + ac$ das a weg, so hat man $ab + ac$ durch a dividiert. Es sollte also nicht „weglassen", sondern „dividieren" heifsen, und das Ausheben würde demnach nicht in die Multiplication, sondern in die Division mit folgender Ableitung gehören. Nach dem 11. Satze ist $ab + ac =$ dem gemeinsamen Faktor a multipliciert mit einem Quotient, dessen Dividend jener gegebene Ausdruck $ab + ac$ und dessen Divisor die 2. Zahl a ist. Folglich:

$$ab + ac = a \cdot \frac{ab + ac}{a}$$

$$= a\left(\frac{ab}{a} + \frac{ac}{a}\right)$$

$$= a(b + c).$$

13. Umkehrung:

$$\frac{7}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7+5}{3} \text{ und } \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{7-5}{3}; \text{ allgemein;}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ und } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Man vereinigt beide Ausdrücke auch durch:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

und liest „a durch c, plus oder minus b durch c" u. s. w.

Um also Brüche mit gleichen Nennern (gleichnamige Brüche) zu addieren oder zu subtrahieren, addiert und subtrahiert man die Zähler und giebt dem Resultat den ursprünglichen Nenner als Nenner.

Beispiele: $\frac{3}{11} + \frac{2}{11} = \frac{3+2}{11} = \frac{5}{11};$

$$\frac{13}{19} - \frac{4}{19} = \frac{13-4}{19} = \frac{9}{19};$$

$$\frac{11}{18} - \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{11-5+1}{18} = \frac{7}{18}.$$

1. Zusatz. Ist der Zähler eines Bruches kleiner als der Nenner, so ist der Wert des Bruches kleiner als 1, da zu $\frac{5}{7}$ offenbar noch etwas, nämlich $\frac{2}{7}$, addiert werden mufs (s. §. 1,9), um $\frac{7}{7}$, d. i. 1, zu erhalten, denn es ist:

$$\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5+2}{7} = \frac{7}{7} = 1.$$

Brüche, deren Wert kleiner ist als 1, nennt man echte Brüche, z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{4}{8}$; solche, deren Wert gröfser als 1: unechte, z. B. $\frac{8}{5}$, $\frac{12}{6}$.

Die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten (einfachen) Bruche schreibt man ohne Additionszeichen und nennt dieselbe gemischte Zahl. So ist $5\frac{3}{7}$ eine gemischte Zahl, die für $5 + \frac{3}{7}$ steht.

2. Zusatz. Durch vorstehenden (13.) Satz lassen sich gemischte Zahlen einrichten, d. i. in einen unechten Bruch verwandeln. Denn:

$$3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{5} + \frac{4}{5} \text{ (s. 3. Satz)} = \frac{3 \cdot 5 + 4}{5}$$
$$= \frac{15+4}{5} = \frac{19}{5}.$$

Vergleicht man $3\frac{4}{5}$ mit $\frac{3 \cdot 5 + 4}{5}$, so ergiebt sich für das Einrichten der Brüche die Regel:

Den Zähler des gesuchten unechten Bruches findet man, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner multipliciert und das Produkt um den Zähler vermehrt.

Beispiel: $$7\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{23}{3}.$$

14. $\frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{3}{8}$, allgemein: $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b}$. Oder:

Gleiche Faktoren des Zählers und Nenners heben sich.

Beweis. Q. (rechts) $\times$ Dsr. (links unten) $= \frac{3}{8} \cdot 8 \cdot 7 = 3 \cdot 7$ (s. 10. Satz) = Dd. (links oben)!

Beispiele. $\frac{5 \cdot 6 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6 \cdot 3}{7}$; $\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$;

$$\frac{(a+b)(c+d)}{5(a+b)} = \frac{c+d}{5}.$$

15. Umkehrung:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7}, \text{ allgemein: } \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}. \quad \text{Oder:}$$

Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man den Bruch erweitert, d. h. Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert.

Oder $a:b = (ad):(bd)$ geschrieben, heifst der Satz:

Der Quotient bleibt derselbe, wenn Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliciert werden.

Beispiele. $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{18}{45}$ ($\frac{2}{5}$ ist mit 9 erweitert worden). $1234:75 = (1234 \cdot 4):(75 \cdot 4) = 4936:300$.

1. Zusatz. Ist der Zähler oder der Nenner ein Produkt, so ist beim Erweitern nach §. 10, 8 nur ein Faktor zu multiplicieren; z. B. $\frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 26}$ mit 4 erweitert $= \frac{20 \cdot 7}{3 \cdot 104}$.

2. Zusatz. Um $\frac{4}{7}$ in 21tel zu verwandeln $\left(\frac{4}{7} = \frac{?}{21}\right)$, hat man zunächst die Zahl zu suchen, wit welcher $\frac{4}{7}$ zu erweitern ist, also die Aufgabe zu lösen: Mit welcher Zahl ist 7 zu multiplicieren, um 21 zu erhalten? Dies geschieht nach dem 11. Satze, denn $21 = 7 \cdot \frac{21}{7} = 7 \cdot 3$. Der Nenner 7 ist mithin mit $\frac{21}{7}$ (d. i. 3) zu multiplicieren und folglich auch der Zähler. Allgemein:

Um einen Bruch in einen andern mit bestimmtem Nenner zu verwandeln, ist jener mit dem Quotient aus dem neuen und alten Nenner zu erweitern.

Beispiel. $\frac{7}{8} = \frac{?}{40}$. Hier ist $\frac{7}{8}$ mit $40:8 = 5$ zu erweitern. Daher:

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{35}{40}.$$

3. Zusatz. Um ungleichnamige Brüche (Brüche mit verschiedenen Nennern) zu addieren oder zu subtrahieren, sind sie zuvor durch Erweitern gleichnamig zu machen.

Beispiele:

$$\frac{5}{14}+\frac{8}{21}=\frac{5\cdot 3}{14\cdot 3}+\frac{8\cdot 2}{21\cdot 2}=\frac{15}{42}+\frac{16}{42}=\frac{31}{42};$$

$$\frac{11}{12}-\frac{3}{16}=\frac{11\cdot 4}{12\cdot 4}-\frac{3\cdot 3}{16\cdot 3}=\frac{44}{48}-\frac{9}{48}=\frac{35}{48}.$$

16. $\frac{14:7}{35:7}=\frac{14}{35}$; allgemein: $\frac{a:d}{b:d}=\frac{a}{b}$. Oder:

Gleiche Divisoren des Zählers und Nenners heben sich.

Beweis. Q. $\times$ Dsr. $=\frac{14}{35}\cdot 35:7=14:7$ (s. 10. Satz) $=$ Dd.!

Beispiel.

$$\frac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}}\ \left(\text{d. i. } \frac{3:11}{5:11}\right)=\frac{3}{5}.$$

17. Umkehrung:

$$\frac{14}{35}=\frac{14:7}{35:7};\ \text{allgemein: } \frac{a}{b}=\frac{a:d}{b:d};\ \text{oder:}$$

Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

Man nennt diese Operation Kürzen (Heben, Aufheben, Reducieren, Verkürzen, Abkürzen, Abbrevieren — Verkleinern?). Schreibt man $a:b=(a:d):(b:d)$, so heifst der Satz:

Der Quotient bleibt unverändert, wenn Dividend und Divisor durch dieselbe Zahl dividiert werden.

Beispiele.

$\frac{14}{35}$ läfst sich durch 7 kürzen $=\frac{14:7}{35:7}=\frac{2}{5}$;

$$240:80=(240:10):(80:10)=24:8=3;$$

$$\frac{8}{24}=\frac{8:8}{24:8}=\frac{1}{3}.$$

18. $\frac{6\cdot 8}{2}=\frac{6}{2}\cdot 8$ und auch $\frac{6\cdot 8}{2}=6\cdot\frac{8}{2}$; allgemein:

$\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}\cdot b$, oder auch $\frac{ab}{c}=a\cdot\frac{b}{c}$. Oder:

Um ein Produkt zu dividieren, darf man nur einen Faktor dividieren. (Vergl. §. 11, 8).

Beweis. Man unterscheide in:

$$\underset{\text{Dd.}}{(6\cdot 8)}:\underset{\text{Dsr.}}{2}=\underbrace{\frac{6}{2}\cdot 8}_{\text{Q.}}$$

Dsr. $\times$ Q. $= 2 \cdot \frac{6}{2} \cdot 8 = 6 \cdot 8$ (s. 10. Satz) $=$ Dd.!

Für $\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$ ist: Q. (rechts) $\times$ Dsr. (links unten) $=$ $a \cdot \frac{b}{c} \cdot c = a \cdot b =$ Dd. (links oben)!

Beispiele. $\frac{15 \cdot 18}{3} = 15 \cdot \frac{18}{3} = 15 \cdot 6$, oder auch:

$\frac{15 \cdot 18}{3} = \frac{15}{3} \cdot 18 = 5 \cdot 18$, nicht aber:

$\frac{15 \cdot 18}{3} = \frac{15}{3} \cdot \frac{18}{3} = 5 \cdot 6.$

$\frac{3 \cdot 14}{7} = 3 \cdot \frac{14}{7} = 3 \cdot 2$; abgekürzt $\frac{3 \cdot \overset{2}{\not{14}}}{\not{7}} = 6.$

Der Satz $\frac{ab}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$ (oder $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$) könnte auch ausgesprochen werden:

> Ist der Zähler eines Bruches ein Produkt, so kann man einen Faktor desselben als Faktor des zurückbleibenden Bruches herausstellen.

Beispiele. $\frac{3a}{b} = 3 \cdot \frac{a}{b}$; $\frac{4x}{5} = \frac{4}{5} \cdot x.$

Anmerkung. Erst der jetzige Satz zeigt, dafs

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{8},$$

dafs man also einen Bruch auch als Produkt aus dem Zähler und einem Bruch mit 1 als Zähler betrachten kann. Mithin ist es unlogisch, die Bruchrechnungssätze mit der Erklärung zu beginnen: $\frac{3}{8}$ ist das 3fache der Einheit $\frac{1}{8}$. Vielmehr darf zur Begründung der Bruchrechnung nichts weiter vorausgesetzt werden, als dafs $\frac{3}{8}$ so viel als $(3:8)$, oder $\frac{3}{8}$ Meter so viel als: der 8. Teil einer Länge von 3 Metern ist. Erst jetzt, mit dem 18. Satze, weifs man, dafs $\frac{3}{8}$ Meter auch als „3mal der 8. Teil eines Meters" angesehen werden kann.

1. Zusatz. $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$ kann auch $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$ geschrieben werden. Oder:

> Die Anordnung der Faktoren und Divisoren ist beliebig.

Um $\frac{56 \cdot 13}{7}$ zu berechnen, wird man also nicht zuerst $56 \cdot 13$ multiplicieren und dann das Produkt durch 7 dividieren, sondern praktischer zuerst $56:7=8$ und dann $8 \cdot 13 = 104$ rechnen.

2. Zusatz. Vergleicht man

$$a:c=(a:c) \text{ mit}$$

$$(a \cdot b):c=(a:c)\cdot b,$$ so ergiebt sich der Satz:

So viel mal so grofs der Dividend, so viel mal so grofs der Quotient.

3. Zusatz. Sind Zähler und Nenner des Bruches Produkte, so darf beim Kürzen (nach vorstehendem 18. Satze) nur ein Faktor dividiert werden.

Beispiel. $\frac{28 \cdot 20}{45 \cdot 44}$? Durch 4 gekürzt (d. h. Zähler und Nenner durch 4 dividiert) $=\frac{7 \cdot 20}{45 \cdot 11}$, noch durch 5 gekürzt

$$=\frac{\overset{7}{\cancel{28}} \cdot \overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{9}{\cancel{45}} \cdot \underset{11}{\cancel{44}}}=\frac{28}{99}.$$

Den Quotient 1 schreibt man hierbei nicht; z. B. $\frac{5 \cdot 6}{18 \cdot 25}$ (durch 5 und dann durch 6 gekürzt) $=\frac{\cancel{5} \cdot \cancel{6}}{\underset{3}{\cancel{18}} \cdot \underset{5}{\cancel{25}}}$ (d. i. $\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5}$) $=\frac{1}{15}$.

19. Umkehrung.

$$\frac{6}{2} \cdot 8=\frac{6 \cdot 8}{2} \text{ und } 6 \cdot \frac{8}{2}=\frac{6 \cdot 8}{2},$$

allgemein: $\frac{a}{c} \cdot b=\frac{a \cdot b}{c}$ und $a \cdot \frac{b}{c}=\frac{a\,b}{c}$. Oder:

Um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplicieren, kann man den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicieren.

Beispiele.

$$\frac{2}{7} \cdot 3=\frac{2 \cdot 3}{7}=\frac{6}{7};\ 5 \cdot \frac{4}{23}=\frac{5 \cdot 4}{23}=\frac{20}{23}.$$

1. Zusatz. $a \cdot \frac{b}{c}=\frac{a \cdot b}{c}$ kann auch ausgesprochen werden:

Um irgend eine Zahl (a) mit einem Bruche $\left(\frac{b}{c}\right)$ zu multiplicieren, kann man auch jene Zahl (a) mit dem Zähler (b) multiplicieren und dann das Produkt durch den Nenner (c) dividieren.

2. Zusatz. $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ kann nach dem 18. Satze auch geschrieben werden:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b.$$

Um also irgend eine Zahl (a) mit einem Bruche zu multiplicieren, kann man jene Zahl auch durch den Nenner des Bruches dividieren und den Quotient alsdann mit dem Zähler multiplicieren.

20.

$$\frac{a}{b:c} = \frac{a}{b} \cdot c.$$

Beweis. Q. (rechts) $\times$ Dsr. (links unten) $= \frac{a}{b} \cdot c \cdot b : c = \frac{a}{b} \cdot b \cdot c : c = a \cdot c : c \left(\text{oder } \frac{ac}{c}\right) = a =$ Dd.!

21. Umkehrung: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b:c}.$

Um einen Bruch mit irgend einer Zahl zu multiplicieren, kann man den Nenner durch diese Zahl dividieren.

Beispiel: $\frac{7}{12} \cdot 4 = \frac{7}{12:4} = \frac{7}{3}.$

Anmerkung. Die Multiplication eines Bruches mit ganzer Zahl könnte sowohl nach Satz 19, als auch nach Satz 21 ausgeführt werden. Einfacher ist es, die ganze Zahl (nach Satz 19) stets als Faktor in den Zähler zu stellen und vor der Multiplication zu kürzen.

1. Beispiel:

$$\frac{5}{18} \cdot 12 = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{18}}} \text{ (19. Satz!)} = \frac{10}{3}.$$

Dafür kürzer: $\frac{5}{\underset{3}{\cancel{18}}} \cdot \overset{2}{\cancel{12}} = \frac{10}{3}.$

2. Beispiel:

$$\frac{4}{15} \cdot 5 = \frac{4 \cdot \cancel{5}}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{4}{3} \text{ (statt des 21. Satzes!).}$$

Dafür kürzer: $\frac{4}{\underset{3}{\cancel{15}}} \cdot \cancel{5} = \frac{4}{3}.$

22. $\frac{8}{9} : 2 = \frac{8}{2} : 9;$ oder $(8:9):2 = (8:2):9;$

allgemein: $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{c}:b$, oder $(a:b):c=(a:c):b$. In Worten:

Die Anordnung der Divisoren ist beliebig.

Beweis. $\text{Dsr.} \times \text{Q.} = c \cdot \frac{a}{c}:b = a:b = \text{Dd.!}$

Beispiel. Anstatt 500 zuerst durch 4 und dann den Quotient (125) durch 5 zu dividieren, kann man auch 500 zuerst durch 5 $(500:5=100)$ und dann den Quotient (100) durch 4 dividieren $(100:4=25)$.

Nach vorstehendem Satze und nach Satz 18, 1. Zus. können nun beliebig viele Faktoren und Divisoren beliebig angeordnet werden.

Es ist daher:

$a:b\cdot c:d\cdot e$ auch $=a\cdot c\cdot e:b:d=a:d\cdot e\cdot c:b$ u. s. w.,

d. i. $(((a:b)\cdot c):d)\cdot e=(((a\cdot c)\cdot e):b):d=(((a:d)\cdot e)\cdot c):b$ u. s. w.

1. Zusatz. Derselbe (22.) Satz kann auch, wenn man Colon mit Bruchstrich vertauscht, geschrieben werden:

$$\frac{8}{9}:2=\frac{8:2}{9}, \text{ allgemein: } \frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}. \text{ Oder:}$$

Einen Bruch dividiert man durch eine ganze Zahl, indem man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert.

Beispiel: $\frac{6}{7}:3=\frac{6:3}{7}=\frac{2}{7}$.

2. Zusatz. Vergleicht man

$$a:c=\frac{a}{c} \text{ mit}$$

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{c}:b, \text{ so ergiebt sich:}$$

So viel mal so klein der Dividend $\left(\frac{a}{b}\text{ statt } a\right)$, so viel mal so klein der Quotient $\left(\frac{a}{c}:b \text{ statt } \frac{a}{c}\right)$.

23. $$\frac{8}{2\cdot 5}=\frac{8}{2}:5; \text{ allgemein:}$$

$$\frac{a}{b\cdot c}=\frac{a}{b}:c \qquad \text{oder} \qquad a:(b\cdot c)=\frac{a}{b}:c.$$

Beweis.

$\text{Dsr.} \times \text{Q.} = b\cdot c\cdot \frac{a}{b}:c=c\cdot a:c=a$ (s. 10. Satz, 2. Anm., A) $=\text{Dd.!}$

I. Anstatt durch ein Produkt zu dividieren, kann man durch die Faktoren einzeln dividieren.

Beispiel: $1728 : 48 = 1728 (6 \cdot 8) = (1728 : 6) : 8$,
daher $1728 : 6$
$288 : 8$
$= 36$.

Oder: II. Ist der Nenner eines Bruches ein Produkt, so kann man einen der Faktoren des Nenners als Divisor des zurückbleibenden Bruches setzen.

Beispiele:

$$\frac{12}{5 \cdot 6} = \frac{12}{6} : 5 = 2 : 5 = \frac{2}{5}; \text{ abgekürzt: } \frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{5 \cdot \cancel{6}} = \frac{2}{5};$$

$$\frac{a}{4b} = \frac{a}{b} : 4; \quad \frac{5}{9a} = \frac{5}{9} : a.$$

1. Zusatz. Vergleicht man

$$a : b = \frac{a}{b} \text{ mit}$$

$$a : (b \cdot c) = \frac{a}{b} : c, \text{ so ergiebt sich:}$$

So viel mal so grofs der Divisor, so viel mal so klein der Quotient.

Beispiel: Es ist $120 : 10 = 12$; wie viel ist $120 : 20$, abgeleitet aus der vorhergehenden Gleichung? Da hier der Divisor 2mal so grofs ist, als in der gegebenen Gleichung, so mufs der Quotient 2mal so klein als 12, folglich $= 6$ sein.

2. Zusatz. Der Satz kann auch $a : (b \cdot c) = a : b : c$ geschrieben werden, oder:

Löst man nach einem Divisionszeichen eine Parenthese auf, so verwandeln sich die in derselben befindlichen Faktoren in Divisoren.

24. Umkehrung.

$$\frac{8}{2} : 5 = \frac{8}{2 \cdot 5}, \text{ allgemein: } \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

Einen Bruch dividiert man durch eine ganze Zahl, indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliciert.

Beispiele:

$$\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8 \cdot 3} = \frac{5}{24};$$

$$\frac{1}{4} : 5 = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}.$$

Anmerkung. Die Division eines Bruches durch eine ganze Zahl kann also sowohl durch den 22., als auch 24. Satz ausgeführt werden. Einfacher ist es, nur den letztern Satz anzuwenden, jedoch den Divisor zunächst nur als Faktor dem Nenner

hinzuzufügen, um eventuell vor der Multiplication zu kürzen. (Vergl. die Anmerkung zum 21. Satze).

Beispiele:

$$\frac{8}{9}:4 \text{ (22. Satz)} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{9\cdot\cancel{4}} = \frac{2}{9};$$

$$\frac{27}{28}:18 \text{ (24. Satz)} = \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{28\cdot\underset{2}{\cancel{18}}} = \frac{3}{56}.$$

Wie grofs ist der 6. Teil von $\frac{12}{13}$? $\frac{12}{13}:6 = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{13\cdot\cancel{6}} = \frac{2}{13}$.

1. Zusatz. Derselbe Satz kann auch geschrieben werden:

$$a:b:c = a:(b\cdot c). \quad \text{Oder:}$$

I. Anstatt durch mehrere Zahlen der Reihe nach zu dividieren, kann man sogleich durch ihr Produkt dividieren.

Soll z. B. 190 zuerst durch 5 und der Quotient ($190:5 = 38$) hierauf durch 2 dividiert werden, so kann man dafür 190 sogleich durch $5\cdot2$ dividieren; folglich:

$$190:5:2 = 190:(5\cdot2) = 190:10 = 19.$$

II. Bildet man nach einem Divisionszeichen eine Parenthese, so verwandeln sich die Divisoren innerhalb derselben in Faktoren.

Beispiel: $a:b:c:d = a:(b\cdot c\cdot d)$.

2. Zusatz. Ist $a:b:c:d = 1$, so ist also auch $a:(b\cdot c\cdot d) = 1$, und da Q. $\times$ Dsr. = Dd. sein mufs, so ist $1\cdot b\cdot c\cdot d = a$, d. i. $b\cdot c\cdot d = a$. Oder:

Dividiert man eine Zahl der Reihe nach durch etliche Divisoren und ist der letzte Quotient = 1, so mufs das Produkt der Divisoren gleich dem Dividend sein.

Beispiel:

$$\begin{array}{c} 120:2 \\ \hline 60:3 \\ \hline 20:4 \\ \hline 5:5 \\ \hline =1. \end{array} \quad \text{Folglich: } 2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120.$$

25. $\frac{8\cdot15}{4\cdot5} = \frac{8}{4}\cdot\frac{15}{5}$; allgemein: $\frac{a\cdot c}{b\cdot d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$. Oder:

Den Quotient aus 2 Produkten kann man in ein Produkt aus 2 Quotienten verwandeln, indem man aus den Faktoren des Zählers die Zähler, aus den Faktoren des Nenners die Nenner der beiden Quotienten bildet.

Beweis.

$$\text{Q.} \times \text{Dsr.} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot b \cdot d = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot d\right) = a \cdot c = \text{Dd.!}$$

Beispiele: $\frac{21 \cdot 32}{7 \cdot 8} = \frac{21}{7} \cdot \frac{32}{8} = 3 \cdot 4 = 12.$

[Hier könnte auch Satz 19 angewendet werden: $\frac{\overset{3}{\cancel{21}} \cdot \overset{4}{\cancel{32}}}{\cancel{7} \cdot \cancel{8}} = 3 \cdot 4 = 12.$]

$$\frac{5a}{6b} = \frac{5}{6} \cdot \frac{a}{b}; \quad \frac{x}{2y} = \frac{1 \cdot x}{2 \cdot y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y}.$$

26. Umkehrung:

$\frac{8}{4} \cdot \frac{15}{5} = \frac{8 \cdot 15}{4 \cdot 5}$, allgemein: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Oder:

Um Brüche zu multiplicieren, multipliciert man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner.

Beispiel: $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$

Anmerkung. In $\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 12}$ kann nach dem 17. Satz 8 mit 12 und 5 mit 15 gekürzt werden, folglich kann man auch schon in der ersten Form $\left(\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}\right)$ jeden Zähler nicht blofs mit dem zugehörigen Nenner, sondern auch mit dem Nenner des andern Bruches kürzen. Daher:

$\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{15}}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\underset{3}{\cancel{12}}}$ (8 mit 12 durch 4, 5 mit 15 durch 5 gekürzt) $= \frac{2}{9}$;

$\frac{20}{21} \cdot \frac{14}{25}$ (20 mit 25 durch 5, 14 mit 21 durch 7 gekürzt)

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{21}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{8}{15}.$$

Zusatz. $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 3} = 1$ (s. 8. Satz). Allgemein:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

27.
$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}.$$

Beweis. Q. $\times$ Dsr. $= a \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c} = a \cdot 1$ (s. den Zusatz zum 26. Satz) $= a =$ Dd.!

Um diese Division einer beliebigen Zahl durch einen Bruch in bequemer Weise aussprechen zu können, bedarf es der nachstehenden Erklärung.

28. I. $a + 0 = a, \; a - 0 = a.$
$$a \cdot 1 = a, \; a : 1 = a.$$

Addiert oder subtrahiert man 0, multipliciert oder dividiert man mit 1, so bleibt die ursprüngliche Zahl unverändert. 1 ist also Das in Bezug auf Multiplication und Division, was 0 in Bezug auf Addition und Subtraktion ist. Der Mittelpunkt 0 der Addition und Subtraktion um irgend eine Zahl vermehrt oder vermindert, z. B. $0 + 8$ und $0 - 8$, führt zu den entgegengesetzten Gröfsen (positive Zahl $+8$, negative Zahl -8), die später betrachtet werden sollen. Der Mittelpunkt 1 der Multiplication und Division mit irgend einer Zahl multipliciert oder dividiert, mufs mithin gleichfalls zu entgegengesetzt liegenden Zahlen führen, jedoch entgegengesetzt im multiplicativen Sinne. Solche Zahlen sind daher $1 \cdot 8$ und $1 : 8$, d. i. 8 und $\frac{1}{8}$. Man nennt dieselben reciproke (umgekehrte, inverse). Wie vorstehendes Beispiel zeigt, findet man von 8 die reciproke Zahl $\frac{1}{8}$, indem man 1 durch die gegebene Zahl 8 dividiert. Da dies für jede andere Zahl der Fall sein mufs, so gilt allgemein:

Von einer gegebenen Zahl findet man den reciproken Wert, wenn man 1 durch dieselbe dividiert.

II. Der reciproke Wert von $\frac{5}{7}$ ist daher

$$= 1 : \frac{5}{7} = 1 \cdot \frac{7}{5} \text{ (s. Satz 27)} = \frac{7}{5}.$$

Der reciproke Wert von $\frac{a}{b}$ ist $1 : \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$.

Hieraus folgt weiter, dafs man den reciproken Wert einer in Bruchform gegebenen Zahl $\left(\frac{a}{b}\right)$ auch dadurch mechanisch bilden kann, dafs man Zähler mit Nenner gegenseitig vertauscht $\left(\frac{b}{a}\right)$.

Beispiele. Der reciproke Wert von $\frac{7}{9} = \frac{9}{7}$,

„ „ „ „ $\frac{1}{4} = \frac{4}{1}$ oder 4,

Der reciproke Wert von 13 (d. i. $\frac{13}{1}\Big) = \frac{1}{13}$,

„ „ „ „ $4\frac{2}{3}$ (d. i. $\frac{14}{3}\Big) = \frac{3}{14}$,

„ „ „ „ 123 (d. i. $\frac{123}{1}\Big) = \frac{1}{123}$,

„ „ „ „ $x = \frac{1}{x}$ (entweder unmittelbar nach I, oder nach II aus $\frac{x}{1}\Big)$.

Der reciproke Wert von $\frac{3}{8} + \frac{2}{7}$ ist nicht $\frac{8}{3} + \frac{7}{2}$, sondern nach I

$$= \frac{1}{\frac{3}{8} + \frac{2}{7}}, \text{ mit } 8 \cdot 7 \text{ erweitert}$$

$$= \frac{8 \cdot 7}{\left(\frac{3}{8} + \frac{2}{7}\right) \cdot 8 \cdot 7}, \text{ d. i. (s. §. 11, 4)}$$

$$= \frac{8 \cdot 7}{\frac{3}{8} \cdot 8 . 7 + \frac{2}{7} \cdot 7 \cdot 8} = \frac{56}{3 \cdot 7 + 2 \cdot 8} = \frac{56}{21 + 16} = \frac{56}{37}.$$

Von $\frac{3}{8} + \frac{2}{7}$ hätte man den reciproken Wert auch finden können, indem man die Brüche zuvor addierte. Es ist

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{8 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{21}{56} + \frac{16}{56} = \frac{37}{56}.$$

Von diesem Bruche aber ist der reciproke Wert $= \frac{56}{37}$, wie oben!

III. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ (s. 26, Zus.) läfst sich jetzt aussprechen:

Jede Zahl mit ihrem reciproken Wert multipliciert giebt 1.

Beispiele: $\frac{7}{16} \cdot \frac{16}{7} = 1$; $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

1. Zusatz. Der 27. Satz $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$ kann nun in folgender Weise ausgesprochen werden:

Anstatt durch einen Bruch zu dividieren, multipliciert man mit dem reciproken Bruche.

Beispiele: $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$;

$$4 : \frac{11}{12} = 4 \cdot \frac{12}{11} = \frac{48}{11};$$

$$1 : \frac{1}{8} = 1 \cdot \frac{8}{1} = 8;$$

$$12 \cdot \frac{6}{11} = \overset{2}{\cancel{12}} \cdot \frac{11}{\cancel{6}} = 22;$$

$$\frac{9}{10} : \frac{27}{35} = \frac{\cancel{9}}{\underset{2}{\cancel{10}}} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{35}}}{\underset{3}{\cancel{27}}} = \frac{7}{6}.$$

$$5 : 7\frac{1}{2} = 5 : \frac{15}{2} = \cancel{5} \cdot \frac{2}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{2}{3}.$$

Der $\frac{3}{8}$ te Teil von 12 ist $12 : \frac{3}{8} = \overset{4}{\cancel{12}} \cdot \frac{8}{\cancel{3}} = 32.$

Anmerkung. Diese Regel ist nicht auf ganzzahlige Divisoren anzuwenden. Man rechne also nicht:

$$\frac{5}{6} : 3 = \frac{5}{6} : \frac{3}{1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18},$$

ſondern unmittelbar (s. 24. Satz):

$$\frac{5}{6} : 3 = \frac{5}{6 \cdot 3} = \frac{5}{18}.$$

2. Zusatz. Die Division ist also auch eine Multiplication mit reciprokem Divisor.

3. Zusatz. $$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a\,c}{b}.$$ Oder:

Um irgend eine Zahl (a) durch einen Bruch zu dividieren, kann man auch jene Zahl (a) mit dem Nenner des Bruches multiplicieren und dann das Produkt durch den Zähler dividieren.

4. Zusatz. Für $a : \frac{b}{c} = \frac{a\,c}{b}$ kann man auch setzen:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \cdot c$$ (s. 18. Satz). Oder:

Anstatt irgend eine Zahl (a) durch einen Bruch zu dividieren, kann man auch jene Zahl (a) durch den Zähler des Bruches dividieren und den Quotient mit dem Nenner multiplicieren.

(Folgt auch aus dem 3. Zusatze mittelst des 1. Zusatzes des 18. Satzes.)

5. Zusatz. Vergleicht man $a:b = \frac{a}{b}$ mit

$$a:\frac{b}{c} = \frac{a}{b}\cdot c$$ (s. 4. Zusatz), so ergiebt sich:

So viel mal so klein der Divisor, so viel mal so grofs der Quotient.

29.
$$\frac{39}{5} = 7 + \frac{39 - 5\cdot 7}{5}.$$

Um irgend eine Zahl (39) durch eine zweite (5) zu dividieren, kann man eine beliebige dritte Zahl (7) als Quotient setzen, wenn man diesen um einen Bruch $\left(\frac{39 - 5\cdot 7}{5}\right)$ vermehrt, dessen Zähler $(39 - 5\cdot 7)$ der gegebene Dividend (39) ist, vermindert um das Produkt aus dem Divisor (5) und dem angenommenen Quotient (7) und dessen Nenner der gegebene Divisor (5) ist.

Beweis.
$$\frac{39}{5} = 7 + \frac{39}{5} - 7 \quad \text{(s. §. 9, 7)}$$
$$= 7 + \frac{39}{5} - \frac{5\cdot 7}{5} \quad \text{(s. §. 13, 2)}$$
$$= 7 + \frac{39 - 5\cdot 7}{5} \quad \text{(s. §. 13, 13).}$$

Dies kann noch $7 + \frac{39 - 35}{5}$.

$= 7 + \frac{4}{5} = 7\frac{4}{5}$ gesetzt werden.

Allgemein:
$$\frac{D}{d} = q + \frac{D}{d} - q$$
$$= q + \frac{D}{d} - \frac{dq}{d} \quad \text{(s. §. 13, 2)}$$
$$✱\ \frac{D}{d} = q + \frac{D - dq}{d} \quad \text{(s. §. 13, 13).}$$

Vorstehende Ableitung mit speciellen Zahlen könnte man in folgender Weise abkürzen:

$$39:5 = 7 + \frac{4}{5} = 7\frac{4}{5}.$$
35 subt.
4 : 5 ....

In der Praxis schreibt man nur $39:5 = 7\frac{4}{5}$.
35
4

Anmerkung. Da man durch diese Divison immer nur einen Teil des Quotient auf einmal erhält, hier zuerst 7, dann $\frac{4}{5}$, so nennt man dieselbe Partialdivision.

1. Zusatz. Wie schon bemerkt, könnte als Quotient jede beliebige Zahl gewählt werden, im vorstehenden Beispiel z. B. 6 statt 7, und die Rechnung wäre folgende:

$$\frac{39}{5} = 6 + \frac{39 - 5 \cdot 6}{5}$$

$$= 6 + \frac{39 - 30}{5} = 6 + \frac{9}{5}.$$

Dieses Resultat wäre jedoch des unechten Bruches $\frac{9}{5}$ wegen unpraktisch. Welcher Quotient aber bei speciellen Zahlen stets der passendste ist, mag durch nachstehenden Zusatz erörtert werden.

2. Zusatz. Man sagt, die Division zweier ganzen Zahlen geht auf, wenn der Quotient selbst wieder eine ganze Zahl ist.

Beispiele: $20 : 5 = 4$; $144 : 2 = 72$.

Liegt jedoch der Quotient zwischen 2 auf einander folgenden ganzen Zahlen, so geht die Division nicht auf. In diesem Falle wird die Rechnung mittelst der Partialdivision ausgeführt und man nimmt zunächst als Quotient die kleinere der beiden Zahlen, zwischen welche der gesuchte Quotient fällt. In Bezug auf $\frac{39}{5}$ (s. ob.) ist zu beachten, dafs $\frac{35}{5} = 7$, $\frac{40}{5} = 8$, folglich ist als Quotient zunächst die kleinere dieser beiden Zahlen (7) zu nehmen, damit der noch hinzukommende Bruch $\left(\frac{4}{5}\right)$ kleiner als 1 ist (zwischen 0 und 1 liegt.)

2. Beispiel. Soll $43 : 8$ dividiert werden, so ist zunächst zu berücksichtigen, dafs $\frac{40}{8} = 5$, $\frac{48}{8} = 6$, und mithin ist 5 als erster Teil des Quotient zu nehmen.

$$\frac{43}{8} = 5 + \frac{43 - 8 \cdot 5}{8}$$

$$= 5 + \frac{43 - 40}{8}$$

$$= 5 + \frac{3}{8} = 5\frac{3}{8}.$$

Abgekürzt:
$$\begin{array}{l} 43:8=5\frac{3}{8}. \\ \underline{40} \\ 3 \end{array}$$

3. Zusatz. Geht die Division nicht auf, so wird oft als Quotient nur die durch die Partialdivision erhaltene ganze Zahl und ein „Rest" angegeben, welcher der unmittelbar nach Bestimmung jener ganzen Zahl erhaltene Rest (also der Zähler des hinzukommenden Bruches) ist. Man sagt daher (s. letztes Beispiel): „43 durch 8 dividiert, giebt 5 als Quotient, 3 als Rest". Diese Angabe aber ist unvollständig und unbestimmt, da sich ohne Kenntnis des Dividend und Divisor offenbar nicht aus „Quot. 5, Rest 3" auf den vollständigen Quotient „$5+\frac{3}{8}$" schliefsen läfst. Um mithin den Quotient stets vollständig und bestimmt zu erhalten, ist der angegebene „Rest" noch durch den ursprünglichen Divisor zu dividieren. Es mufs also statt „$43:8=5$, Rest 3" heifsen:

$$\frac{43}{8}=5+\frac{\text{Rest } 3}{8}=5+\frac{3}{8}.$$

Allgemein: Ist $\frac{a}{b}=c$ mit dem Reste d, so bedeutet dies

$$\frac{a}{b}=c+\frac{d}{b}.$$

Aufgabe. 324 : 7?

$$\text{Da } \frac{280}{7}=\frac{28 \text{ Zehner}}{7}=4 \text{ Zehner},$$
$$\frac{350}{7}=\frac{35 \text{ Zehner}}{7}=5 \text{ Zehner},$$

so fällt der gesuchte Quotient zwischen 4 und 5 Zehner. Daher ist zunächst 4 Zehner als Quotient anzunehmen:

$$\frac{324}{7}=4 \text{ Zehner}+\frac{324-7\cdot 4 \text{ Zehner}}{7}$$
$$=40+\frac{324-7\cdot 40}{7}=40+\frac{324-280}{7}$$
$$=40+\frac{44}{7}.$$ Verwandelt man $\frac{44}{7}$ in gleicher Weise, so ergiebt sich
$$=40+6+\frac{44-7\cdot 6}{7}=40+6+\frac{44-42}{7}$$
$$=40+6+\frac{2}{7}=46\frac{2}{7}.$$

Dies könnte zunächst in folgender Weise abgekürzt werden:

$$
\begin{array}{l}
324:7 = 46\tfrac{2}{7} \\
280 \\
\hline
\;\;44:7 \\
\;\;42 \\
\hline
\;\;\;\;2:7
\end{array}
$$

In der Praxis schreibt man jedoch nur:

$$
\begin{array}{l}
324:7 = 46\tfrac{2}{7} \\
28 \\
\hline
\;\;44 \\
\;\;42 \\
\hline
\;\;\;\;2
\end{array}
$$

oder sogar noch einfacher: $\dfrac{324:7}{= 46\tfrac{2}{7}}$.

Durch vorstehende Ableitung erhielt man nach Bestimmung der ganzen Zahl 46 des Quotient den Rest 2. Zugleich zeigte aber auch die Ableitung, dafs der Ausdruck „$324:7 = 46$, Rest 2“ vollständig durch „$\frac{324}{7} = 46 + \frac{2}{7}$“ wiedergegeben werden mufs.

4. Zusatz. Die Partialdivision kann bei jedem Reste beendigt werden. Der durch die Aufgabe gesuchte Quotient ist aber nur dann vollständig, wenn den bis dahin bestimmten Teilen dieses Quotient das sogenannte Supplement, d. h. ein Bruch hinzugefügt wird, der dadurch entsteht, dafs man jenen Rest durch den ganzen Divisor dividiert. Der Beweis ist aus dem vorstehenden Beispiel ersichtlich, denn $\frac{324}{7}$ gab in der dritten Zeile (wo der Quotient $= 40$ und der Rest 44) vollständig: $40 + \frac{44}{7}$; ferner am Schlusse $\frac{324}{7} = 40 + 6$, Rest 2, folglich vollständig $= 40 + 6 + \frac{2}{7}$.

5. Zusatz. Mittelst der Partialdivision verwandelt man unechte Brüche in gemischte Zahlen. Vergleiche die vorstehenden Beispiele:

$$\frac{39}{5} = 7\tfrac{4}{5},\quad \frac{43}{8} = 5\tfrac{3}{8},\quad \frac{324}{7} = 46\tfrac{2}{7}.$$

Anmerkung. Mit dieser Operation ist das Rechnen mit Brüchen in seinen Grundzügen entwickelt und für die nötigen Sätze der vollständige Beweis gegeben worden. Dennoch empfiehlt es sich, die Bruchrechnung noch einmal (s. §§. 31—37) in einer mehr praktischen Darstellung und mit Berücksichtigung besonderer Fälle folgen zu lassen.

30. Gleiches durch Gleiches dividiert, giebt Gleiches.

Ist $A = B$ (Voraussetzung)

so ist auch $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ (Behauptung).

Man schreibt auch: $\left.\begin{array}{l} A = B \\ C = C \end{array}\right\}$ (Voraussetzung)

$\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ (Behauptung).

Beweis. $\frac{A}{C} = \frac{A}{C}$ (s. 1. Axiom),

geht, wenn an die Stelle des A der rechten Seite das ihm gleiche B (s. Voraussetzung) gesetzt wird, über in:

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C}.$$

Zusatz. Ist $A = B$
und $C = D$

so ist auch $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$. (Vgl. §. 7, 9, Zus.)

§. 14. Das Potenzieren.

1. Die zu multiplicierenden Faktoren sind gewöhnlich verschieden (vergl. den Wortlaut von §. 10, 1). Sind sie gleich, z. B.

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 \text{ (s. §. 11, 8, 5. Zus.).}$$

so kürzt dies das Potenzieren durch 2 Zahlen in folgender Weise ab:

Gegeben Gesucht
$8^3 = 512$

{Basis {Exponent Potenz

Potenz

Gelesen: „8 zur 3ten“;
oder: „8 potenziert mit 3“;
oder: „3te Potenz von 8“;
oder: „8 hoch 3“.

Der Faktor (8) wird also zur Basis (Grundzahl, Dignand — Wurzel),
die Anzahl der Faktoren (3) zum Exponent, der rechts oben mit kleinerer Schrift an die Basis gesetzt wird,
das Produkt zur Potenz (Dignität).

2. Potenzieren ist die abgekürzte Multiplication gleicher Faktoren.

Potenz ist das Resultat des Potenzierens, oder bestimmter: das abgekürzte Produkt gleicher Faktoren.

8^3 die formelle oder theoretische Potenz, 512 die materielle oder praktische Potenz.

Beispiele:

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ wird durch 7^5,
$a \cdot a$ durch a^2, $(a-b)(a-b)(a-b)$ durch $(a-b)^3$,
$xxxxxx$ durch x^6, $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ durch $\left(\frac{3}{4}\right)^2$,
$2abbbcc$ durch $2ab^3c^2$ abgekürzt.

3. Umkehrung. Soll 10^4 berechnet, d. i. 10 auf die 4. Potenz erhoben werden, so erhält man:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100 \cdot 100 = 10\,000;$$
$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9 = 729;$$
$$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \cdot 125 = 15\,625;$$
$$x^2 = x \cdot x \text{ oder } xx;$$
$$(bc)^4 = bc \cdot bc \cdot bc \cdot bc = b \cdot c \cdot b \cdot c \cdot b \cdot c \cdot b \cdot c;$$
$$(a+1)^2 = (a+1)(a+1);$$
$$4a^2bc^3 = 4aabccc.$$

Anmerkung. Nach §. 10, 3, IV bedeutet:

$8 \cdot 3^2$ so viel als $8 \cdot (3^2) = 8 \cdot 3 \cdot 3 = 72$,
ab^3 „ „ „ $a \cdot (b^3) = abbb$,
$8 + 3^2$ „ „ „ $8 + (3^2) = 8 + (3 \cdot 3) = 8 + 9$.

Soll dagegen $8 \cdot 3$ auf die 2. Potenz erhoben werden, so mufs $(8 \cdot 3)^2$ geschrieben werden mit der Bedeutung $8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3$.

Die 3. Potenz von ab ist $(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b$.
Die 2. Potenz von $8 + 3 = (8+3)^2 = (8+3)(8+3)$.
Vergleiche die 3 letzten Beispiele mit den 3 ersten!

4. Besondere Ausdrücke.

Der Exponent zeigt den Grad der Potenz an. Es ist also a^4 eine Potenz vom 4. Grade, a^7 eine Potenz von höherem Grade als a^5.

Die 2. Potenz wird gewöhnlich „Quadrat" genannt. Daher wird a^2 gelesen „a Quadrat", und nur wenn der Exponent 2 ausdrücklich hervorgehoben werden soll: „a zur zweiten".

Das Quadrat von 7 ist $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$.

Quadrieren heifst auf die 2. Potenz erheben. Soll 10 quadriert werden, so erhält man $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$.

Das Quadrat einer natürlichen Zahl heifst „Quadratzahl".

1^2, 2^2, 3^2, ... d. i. $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, ... oder:
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... sind Quadratzahlen.

Die 3. Potenz wird auch „Kubus" (Würfel) genannt, daher a^3 auch „a Kubus" oder „Kubus von a" gelesen. Der Kubus von 6 ist $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Kubieren heifst auf die 3. Potenz erheben. Kubiert man 11, so erhält man $11^3 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$. Den Kubus einer natür-

lichen Zahl nennt man „Kubikzahl“. So sind 1^3, 2^3, 3^3, ... d. i. $1 \cdot 1 \cdot 1$, $2 \cdot 2 \cdot 2$, $3 \cdot 3 \cdot 3$, ... oder 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, ... Kubikzahlen.

Die 4. Potenz heifst auch „Biquadrat“. a^4 ist das Biquadrat von a.

a^5, a^6, a^n liest man „a zur fünften“, „a zur sechsten“, „a zur n^{ten}“, dagegen wird $a^{\frac{1}{2}}$, 9^{y-z} des Wohllauts wegen „a hoch $\frac{1}{2}$“, „9 hoch y minus z“ gelesen.

§. 15. Potenzsätze.

1. Die Basis kann nur eine unbenannte Zahl sein; denn nach §. 11, 8, Zus. ist $(8\,\mathcal{M})^3 = 8\,\mathcal{M} \cdot 8\,\mathcal{M} \cdot 8\,\mathcal{M}$ unmöglich.

2. Der Exponent kann nur eine unbenannte Zahl sein; denn er zeigt die Anzahl der Faktoren an (§. 11, 1).

3. Es ist:

$$aaaa = a^4$$
$$aaa = a^3$$
$$aa = a^2, \text{ daher}$$
$$a = a^1.$$

Der fehlende Exponent ist also nicht durch 0, sondern durch 1 zu ergänzen.

4. Umgekehrt ist $a^1 = a$. Als Resultat schreibt man den Exponent 1 nicht; daher nicht 10^1, $(ab)^1$, $(a+b)^1$, sondern 10, ab, $a+b$.

5. Jede Potenz von 1 ist $= 1$. Allgemein: $1^n = 1$.

Denn
$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \text{ (s. §. 11, 2);}$$
$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^2 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1;$$
$$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^3 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1 \text{ u. s. w.}$$

6. Die Elemente der Potenz (Basis und Exponent) können nicht gegenseitig vertauscht werden.

Es ist nicht $1^4 = 4^1$; denn $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;
$$4^1 = 4.$$

2^5 ist nicht $= 5^2$; denn wäre $2^5 = 5^2$, so müfste der Bruch $\frac{2^5}{5^2} = 1$ sein (nach §. 13, 8), aber $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5}$ kann offenbar nicht gekürzt werden.

Allgemein: a^b ist nicht $= b^a$.

Anmerkung. Nur für gewisse Zahlen ist $a^b = b^a$; z. B.:
$$2^4 = 4^2.$$

7. Gleiches mit Gleichem potenziert, giebt Gleiches.

$$\text{Ist } A = B$$
$$\text{so ist auch } A^n = B^n$$

auch geschrieben:

$$\begin{array}{c} A = B \\ n = n \\ \hline A^n = B^n. \end{array}$$

Beweis. $A^n = A^n$ (s. 1. Axiom)
geht, wenn an die Stelle des A der rechten Seite das ihm gleiche B (s. Voraussetzung) gesetzt wird, über in

$$A^n = B^n.$$

Zusatz. Ist

$$\begin{array}{c} A = B \\ n = r \\ \hline \end{array}$$

so ist auch $A^n = B^r$. (Vergl. §. 7, 9, Zus.)

Anmerkung. Die noch fehlenden Sätze des Potenzierens und die Sätze der nachfolgenden Species werden in der allgemeinen Zahlenlehre gelehrt.

§. 16. Das Radicieren.

1. Wäre die Subtraktion die Rechnungsart, welche aus der Summe und dem 1. Summand den 2. suchte, so würde aus $8 + 3 = 11$ nur $11 - 8 = 3$ hervorgehen. Da aber die Anordnung der Summanden beliebig ist, so könnte jene Additionsgleichung auch $3 + 8 = 11$ geschrieben werden und es entstünde nach jener angenommenen Definition für die Subtraktion $11 - 3 = 8$. Die Subtraktion bildet also aus $8 + 3 = 11$ eben so wohl $11 - 8 = 3$ wie $11 - 3 = 8$ und sucht mithin aus der Summe und einem beliebigen Summand den andern Summand. Oder:

> Die Subtraktion berechnet $11 - 8$ nach denselben Regeln wie $11 - 3$. Die Addition läfst mithin nur eine Umkehrung — die Subtraktion — zu.

In gleicher Weise folgt auf Grund des Satzes: „Die Anordnung der Faktoren ist beliebig“ aus der 2. direkten Species (Multiplication) nur eine Umkehrung derselben: die Division. Nehmen wir nun an, dafs aus der dritten direkten Species, dem Potenzieren ($8^3 = 512$), gleichfalls nur eine Umkehrung sich ableiten liefse, die aus der Potenz (512) und einem beliebigen Element derselben (Basis oder Exponent) das andere findet, so würden also die beiden abgeleiteten Gleichungen der neuen indirekten Species mit derselben Bezeichnung zu schreiben sein, die hier durch:

$$\sqrt[3]{512} = 8 \text{ und } \sqrt[8]{512} = 3$$

gegeben sein mag. Dann müfste aber auch die Zahl rechts mit der links oben stehenden Zahl potenziert, die mittelste Zahl als Potenz ergeben, d. h. es müfste $8^3 = 512$ und $3^8 = 512$ sein. Nach §. 15, 6 ist jedoch 8^3 nicht $= 3^8$, und folglich können die beiden Aufgaben:

I. aus der Potenz (512 oder 8^3) und dem Exponent (3) die Basis (8) zu finden;

II. aus der Potenz (512 oder 8^3) und der Basis (8) den Exponent (3) zu finden;

nicht durch dieselbe Rechnungsart gelöst werden.

Mithin läfst das Potenzieren zwei verschiedene Umkehrungen zu und zwar:

I. das Radicieren, welches aus der Potenz und dem Exponent die Basis,

II. das Logarithmieren, welches aus der Potenz und der Basis den Exponent sucht.

Jene angenommene Schreibweise kann daher auch nur für eine dieser Species benutzt werden.

Radicieren.

2. In Bezug auf $8^3 = 512$ würde also das Radicieren

I. entweder aus der Potenz 512 und dem Exponent 3 die Basis 8 suchen. Geschrieben:

Gegeben Gesucht

$$\sqrt[3]{512} = 8$$

Wurzelexponent, Wurzelbasis (zusammen: Wurzel.), Wurzel

Gelesen: „3te Wurzel aus 512"; oder: „512 mit 3 radiciert".

II. oder es würde das Radicieren aus der Potenz 8^3 und dem Exponent 3 die Basis 8 suchen:

$$\sqrt[3]{8^3} = 8.$$

Die Potenz (512) wird also zur Wurzelbasis (Radicand), der Exponent (3) zum Wurzelexponent (Radicator), die Basis (8) zur Wurzel.

Das Zeichen $\sqrt{}$ ist aus dem r des Wortes radix (Wurzel) entstanden.

Die mit dem Wurzelzeichen geschriebene Wurzel nennt man auch „Radical". So ist $\sqrt[4]{a+b}$ ein Radical.

3. Realdefinitionen:

Radicieren (Wurzelausziehen, Depotenzieren) heifst eine Zahl (8) suchen, die mit dem Wurzelexponent (3) potenziert, die Wurzelbasis (512) giebt.

Wurzel ist die Zahl, welche mit dem Wurzelexponent potenziert, die Wurzelbasis giebt.

Es ist $\sqrt[4]{10000} = 10$, weil die Wurzel 10 mit dem Wurzel-

exponent 4 potenziert, $= 10^4 = 10\,000$, also die Wurzelbasis giebt.

$\sqrt[3]{512}$ die formelle oder theoretische, 8 die materielle oder praktische Wurzel.

4. Besondere Ausdrücke.

Statt $\sqrt[2]{\ }$ schreibt man nur $\sqrt{\ }$ und nennt diese (zweite) Wurzel gewöhnlich „Quadratwurzel“. Aus $10^2 = 100$ folgt $\sqrt[2]{100} = 10$, wofür man also $\sqrt{100}$ schreibt und dies „Quadratwurzel aus 100“ liest.

Es ist $\sqrt{49} = 7$, d. i. $\sqrt[2]{49} = 7$, denn die Wurzel (7) mit dem Wurzelexponent (2) potenziert, giebt $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$, welche Zahl der Wurzelbasis gleich ist.

Die dritte Wurzel heifst auch „Kubikwurzel“. Es ist $\sqrt[3]{1000} = 10$ [gelesen: „Kubikwurzel aus 1000“ oder „3te Wurzel aus 1000“]; denn $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

$$\sqrt[3]{1331} = 11; \text{ denn } 11^3 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331.$$

Die vierte Wurzel wird auch „Biquadratwurzel“ genannt.

Die dritte Wurzel aus $a + b$ schreibt man $\sqrt[3]{a + b}$ oder $\sqrt[3]{\ }(a + b)$. $\sqrt[3]{a} + b$ würde $\left(\sqrt[3]{a}\right) + b$ bedeuten.

In $\sqrt[3]{5^2}$ soll zuerst 5^2 berechnet und alsdann aus der gefundenen Zahl 25 die 3. Wurzel gezogen werden. 2 ist hier der „Potenzexponent“, 3 der „Wurzelexponent“.

§. 17. Das Logarithmieren.

1. Das Logarithmieren (oder Exponentiieren) sucht aus der Potenz (512 oder 8^3) und der Basis (8) den Exponent (3).

In Bezug auf $8^3 = 512$ würde dasselbe

I. entweder aus der Potenz 512 und der Basis 8 den Exponent 3 suchen. Geschrieben:

Gegeben Gesucht

$^8lg\ 512 = 3$

Basis, Numerus — Logarithmus; Logarithmus

Gelesen: „Der Acht-Logarithmus von 512“;
oder: „512 mit 8 logarithmiert“;
oder: „der Logarithmus von 512 zur Basis 8“.

II. oder es würde das Logarithmieren aus der Potenz 8^3 und der Basis 8 den Exponent 3 suchen:

$$^{8}lg\,(8^3) = 3.$$

Manche schreiben $lg^{(8)}\,512$ oder $lg\,512_{(8)}$ oder $lg^{8}\,512$ oder $lg_{8}\,512$ oder $\underset{8}{\overset{512}{\times}}$ oder $\frac{512}{8}$.

Die Potenz (512) wird also zum Numerus (Logarithmand, absolute Zahl, natürliche Zahl),
die Basis der Potenz (8) zur Basis (des Logarithmus) oder Grundzahl,
der Exponent (3) zum Logarithmus.

2. Realdefinitionen:

Logarithmieren heifst eine Zahl (3) suchen, welche die Basis (8) auf eine Potenz (8^3) erhebt, die dem Numerus (512) gleich ist.

Logarithmus ist die Zahl, welche die Basis auf eine Potenz erhebt, die dem Numerus gleich ist.

Es ist also $^{5}lg\,625 = 4$; denn $5^4 = 625$;
$^{3}lg\,9 = 2$; denn $3^2 = 9$;
$^{2}lg\,64 = 6$; denn $2^6 = 64$.

$^{8}lg\,512$ ist der formelle oder theoretische Logarithmus, 3 der materielle oder praktische Logarithmus.

3. Besondere Ausdrücke.

Statt ^{10}lg schreibt man nur lg und nennt diese Logarithmen vulgäre (gemeine, dekadische, brigg'sche). Es ist also

$lg\,100\,000 = 5$, d. i. $^{10}lg\,100\,000 = 5$, weil $10^5 = 100\,000$.
$lg\,100 = 2$, d. i. $^{10}lg\,100 = 2$, denn $10^2 = 100$.

4. Die Division konnte nach §. 12, 6 als abgekürzte Subtraktion aufgefafst werden, bei welcher der letzte Rest die Grundzahl 0 der Subtraktion (§. 13, 28) war. Da sich nun 343 dreimal nach einander durch 7 dividieren läfst, wenn der letzte Quotient die Grundzahl 1 der Division (§. 13, 28) werden soll:

$$\begin{array}{r} 343:7 \\ \hline 49:7 \\ \hline 7:7 \\ \hline =1 \end{array}$$

und diese Division durch $\sqrt[3]{343} = 7$ und $^{7}lg\,343 = 3$ abgekürzt werden mag, so kann das Radicieren und Logarithmieren auch als Division mit gleichen Divisoren aufgefafst werden.

Schlufsbemerkung. Die bisher abgeleiteten Species zerfielen in 3 direkte und 4 indirekte:

Direkte Species:		indirekte Species:	
Addition . . .	$8+3=11$	Subtraktion . .	$11-3=8$
Multiplication .	$8\cdot 3=24$	Division . . .	$24:3=8$
Potenzieren . .	$8^3=512$	Radicieren . .	$\sqrt[3]{512}=8$
		Logarithmieren	${}^{8}lg\,512=3.$

Betrachten wir noch einmal die Entstehung der direkten Species:

Addition: $8+5+2=15$ (verschiedene Summanden)
$8+8+8=24$ (gleiche Summanden), dafür

Multiplication: $\left.\begin{array}{r} 8\cdot 3=24 \\ 8\cdot 5\cdot 2=80 \end{array}\right\}$ (verschiedene Faktoren)
$8\cdot 8\cdot 8=512$ (gleiche Faktoren), dafür

Potenzieren: $\left.\begin{array}{r} 8^3=512 \\ 2^{3^2} \text{ (d. i. } 2^9)=512 \end{array}\right\}$ (verschiedene Elemente der Potenz).

Müfste nun nicht eine neue Species entstehen, wenn auch hier die Elemente gleich gesetzt würden? Um diese Frage zu beantworten, setzen wir also die Elemente der Potenz gleich:

$$8^{8^{8}}, \text{ abgekürzt: } \overset{(3)}{8} \qquad 8^{8^{8^{8}}}, \text{ abgekürzt: } \overset{(4)}{8}.$$

Nach §. 11, 8, 4. Zus. läfst sich $8^5=8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8$
als $(8\cdot 8\cdot 8)\cdot(8\cdot 8)=8^3\cdot 8^2$,
oder als $(8\cdot 8)\cdot(8\cdot 8\cdot 8)=8^2\cdot 8^3$,
oder als $8.(8\cdot 8\cdot 8\cdot 8)=8\cdot 8^4$ u. s. w.

auffassen, d. h. die Potenz $8^5=8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8$ kann in verschiedener Weise umgeformt werden, mit andern Worten (§. 6, 2, 1): man kann mit der Potenz rechnen.

Dagegen kann $\overset{(5)}{8}$, d. i. $8^{8^{8^{8^{8}}}}$

nicht beliebig als $\left(8^{8}\right)^{\left(8^{8^{8}}\right)}$ oder als $\left(8^{8^{8}}\right)^{\left(8^{8}\right)}$

aufgefafst werden, weil nach §. 15, 6: a^b nicht $=b^a$ ist. Der Ausdruck $8^{(5)}$ müfste mithin unverändert stehen bleiben, d. h. man kann mit demselben nicht rechnen. Hauptbedingung für eine

Species ist nun nicht die Abkürzung, sondern die Möglichkeit, mit dieser Abkürzung zu rechnen, folglich führt das Potenzieren zu keiner neuen höheren Species, und es giebt daher nicht mehr und nicht weniger als 3 direkte und 4 indirekte Species. Dennoch ist von Manchen eine 8. Species: das Antilogarithmieren (Numerieren) aufgestellt worden, welches aus dem Logarithmus und der Basis desselben den Numerus sucht. Mit demselben Rechte müfste es dann eine Antisubtraktion geben, welche aus dem Rest und dem Subtrahend den Minuend sucht, weil Rest, Subtrahend und Minuend in der Subtraktion dieselbe Stellung einnehmen, wie der Logarithmus, die Basis und der Numerus beim Logarithmieren.

Die bisherige Entwickelung der arithmetischen Begriffe

Einheit,
Zahl (Summe von Einheiten),
Zahlenbildung (Addieren von Einheiten),
Species Addition (Addieren von Zahlen),
Multiplication (Vereinfachung der Addition),
Potenzieren (Vereinfachung der Multiplication),
Logarithmieren (Umkehrung des Potenzierens),

zeigte, dafs wir aus der Einheit, dem undefinierbaren Grundbegriffe der Arithmetik, ohne jeden Sprung zu dem höchsten Begriffe Logarithmus gelangten.

§. 18. Endliche und unendliche Gröfsen. Null.

1. Addiert man eine bestimmte, abgegrenzte Menge von Einheiten, so erhält man eine endliche Zahl. Eine solche ist z. B. 3, oder Quadrillion (1 mit darauffolgenden 24 Nullen) oder Decillion (1 mit darauffolgenden 60 Nullen). Addiert man dagegen Einheiten ohne Aufhören, so dafs ihre Zahl eine unbegrenzte ist, so erhält man die Zahl „unendlich grofs", die mit ∞ abgekürzt wird. Es ist also:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \textit{in inf.} = \infty.$$

Anmerkung. *In inf.*, d. i. *in infinitum* — bis ins Unendliche — die Einheiten in vorstehender Darstellung nach rechts hin bis ins Unendliche fortgesetzt.

2. Es ist also

$$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \textit{in inf.} = \infty \quad \text{(A)}$$

. . . .

. . . .

. . . .

aber auch . . . .

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots \textit{in inf.} = \infty \quad \text{(B)}$$

Die in B ausgedrückte Zahl ist um die 3 voranstehenden Ein-

heiten gröſser als die in A, und doch ist die Anzahl der Einheiten in beiden Zahlen $= \infty$, folglich ist:

$$\infty + 3 = \infty,$$

eben so: $$\infty + 1000 = \infty,$$

allgemein: $$\infty + a = \infty.$$ Oder:

∞ um jede endliche Zahl vermehrt, giebt immer wieder ∞.

3. Würde man vor die 1. Einheit in A nicht bloſs 3, sondern unendlich viele Einheiten setzen, so würde die neu entstehende Zahl B doch immer nur $= \infty$ sein. Es ist also:

$$\infty + \infty = \infty, \text{ d. i. } 2 \cdot \infty = \infty,$$

eben so $3 \cdot \infty = \infty$ u. s. w. Oder:

∞ mit irgend einer endlichen Zahl multipliciert, giebt immer wieder ∞.

4. Denkt man sich eine Länge von 8 Centimetern (die die Zahl 8 vorstellen soll) um den unendlich kleinen Teil von 3 Centimetern (also um $3 : \infty = \frac{3}{\infty}$) vermehrt, so würde die neue Länge doch nur genau 8 Centim. bleiben. Denn würde man sich die 8 Centim. um ein noch so kleines angebbares (meſsbares) Stück, z. B. um den millionten Teil eines Millimeters, oder um den decillionten Teil eines Millimeters vergröſsert denken, so hätte man die 8 Centim. nicht um ein u n e n d l i c h k l e i n e s Stück (wie es jene $\frac{3}{\infty}$ Centim. sein soll) vermehrt, weil 3 Centim. nicht unendlich oft, sondern nur in eine bestimmte abgegrenzte Anzahl von Teilen geteilt werden müssen, wenn ein Decilliontel Millimeter entstehen soll.

Es ist also

$$8 + \frac{3}{\infty} = 8,$$

allgemein, wenn a und b endliche Zahlen vorstellen:

$$a + \frac{b}{\infty} = a.$$

Der unendlich kleine Teil einer endlichen Gröſse (z. B. $\frac{3}{\infty}$) verschwindet mithin in Bezug auf eine endliche Gröſse (8) vollkommen, ist „Nichts“ in Bezug auf endliche Gröſsen. D i e s e s Nichts bezeichnet man mit 0 (Null).

Wir wiederholen: 0 ist nicht das absolute Nichts, sondern der unendlichkleine Teil einer endlichen Gröſse, der allerdings neben endlichen Gröſsen vollkommen verschwindet.

Es ist also:

$$\frac{3}{\infty} = 0, \quad \frac{1000}{\infty} = 0, \text{ allgemein: } \frac{a}{\infty} = 0.$$

5. Aus
$$8 + \frac{1}{\infty} = 8$$
$$8 + \frac{2}{\infty} = 8 + 2 \cdot \frac{1}{\infty} = 8 \text{ (s. §. 13, 18, Anm.)}$$
$$8 + \frac{3}{\infty} = 8 + 3 \cdot \frac{1}{\infty} = 8 \text{ u. s. w.}$$
wird, wenn man zunächst nur den unendlich kleinen Teil der Einheit, d. i. $\frac{1}{\infty} = 0$ setzt:
$$8 + 0 = 8$$
$$8 + 2 \cdot 0 = 8$$
$$8 + 3 \cdot 0 = 8$$
$$\text{allgemein: } a + b \cdot 0 = a.$$

6. Da also $1 \cdot 0$, $2 \cdot 0$, $1000 \cdot 0$ gegen die endliche Gröfse 8 vollkommen verschwindet, so ist es gleichgültig, ob man $1 \cdot 0$ oder $1000 \cdot 0$ zu 8 addiert. Man setzt daher der Einfachheit wegen statt $8 + 1000 \cdot 0 = 8$ nur $8 + 0 = 8$, wenn die Vermehrung um eine unendlich kleine Gröfse angedeutet werden mufs. Es ist mithin
$$1000 \cdot 0 = 0, \text{ allgemein: } a \cdot 0 = 0,$$
wenn diese Produkte Beziehungen zu endlichen Gröfsen haben.

Beispiel. Soll 30, d. i. „3 Zehner + 0 Einer", mit 2 multipliciert werden, so würde man nach §. 11, 4: 6 Zehner + $2 \cdot 0$ Einer erhalten. Man schreibt jedoch nur 60, d. i. 6 Zehner + $1 \cdot 0$ Einer, weil die unendlichkleine Gröfse $2 \cdot 0$ Einer in Bezug auf die endliche Gröfse 6 Zehner ebenso vollständig verschwindet wie $1 \cdot 0$ Einer.

7. Da der millionte Teil von 2 doppelt so grofs ist, als der millionte Teil von 1, der decillionte Teil von 2 doppelt so grofs, als der decillionte Teil von 1 sein mufs, so mufs auch der unendlichkleine Teil von 2, d. i. $\frac{2}{\infty}$ doppelt so grofs als $\frac{1}{\infty}$, d. i. $2 \cdot 0$ doppelt so grofs als $1 \cdot 0$ sein, sobald diese Gröfsen nur unter sich betrachtet und nicht in Beziehung zu endlichen Gröfsen gesetzt werden.

Unendlichkleine Gröfsen unter sich allein verglichen stehen also im endlichen Verhältnis.

Anmerkung. $4 \cdot 0$ ist also unter diesen Bedingungen gröfser als $3 \cdot 0$. Wollte man $4 \cdot 0 = 3 \cdot 0$ setzen, wo beide Produkte keine Beziehungen zu endlichen Gröfsen haben, so würde man, wenn man nach §. 13, 30 beide Seiten durch 0 dividierte, zu dem falschen Schlufs $4 = 3$ gelangen. Wollte man $4 \cdot 7 = 3 \cdot 7$ setzen und die Gleichung durch 7 dividieren, so würde man nur denselben Fehler begehen.

8. Aus $8 + 0 = 8$, allgemein $a + 0 = a$ (s. 5. Satz) folgt nach §. 8, 1, Zus.:

I. $8 - 0 = 8$, allgemein: $a - 0 = a$; oder:
Eine Gröfse um 0 vermindert giebt jene Gröfse selbst wieder.

II. $8 - 8 = 0$, allgemein: $a - a = 0$ (vergl. §. 9, 6); oder: Eine Gröfse um sich selbst vermindert giebt 0.

Beispiele: $x - x = 0$;
$(a + b - c) - (a + b - c) = 0$.

9. Aus
$\infty + 3 = \infty$, $\infty + 1000 = \infty$, allgemein: $\infty + a = \infty$ (s. 2. Satz) folgt nach §. 8, 1:

I. $\infty - 3 = \infty$, $\infty - 1000 = \infty$, $\infty - a = \infty$.
Eine unendlichgrofse Zahl um eine endliche Zahl vermindert, giebt jene unendlichgrofse Zahl selbst wieder.

II. $\infty - \infty = 3$, $\infty - \infty = 1000$, $\infty - \infty = a$.

Der Satz $a - a = 0$ (s. 8. Satz, II) bezieht sich also nur auf die endliche Zahl a, gilt aber nicht für unendlichgrofse Zahlen. Vielmehr kann $\infty - \infty = 1$, oder $= 1000$ u. s. w., überhaupt $=$ jeder endlichen Zahl, aber auch $= 0$ sein.

$\infty - \infty$ ist mithin eine sogenannte „unbestimmte Gröfse“.

10. Aus $3 \cdot 0 = 0$, $1000 \cdot 0 = 0$, $a \cdot 0 = 0$ (s. 6. Satz) folgt nach §. 12, 1, Zusatz:

I. $\frac{0}{3} = 0$, $\frac{0}{1000} = 0$, $\frac{0}{a} = 0$; oder:

0 durch jede endliche Zahl dividiert giebt 0.

Beispiel. $0 : 13 = 0$. Die Division $0 : 13$ geht also auf, d. h. es bleibt kein Rest.

II. $\frac{0}{0} = 3$, $\frac{0}{0} = 1000$, $\frac{0}{0} = a$.

Es kann daher $\frac{0}{0}$ die Zahl 3, oder 1000, oder 1, also jede endliche Zahl bedeuten. Es ist mithin $\frac{0}{0}$ eine unbestimmte Gröfse. $\frac{a}{a} = 1$ gilt also nur für die endliche Zahl a.

11. Aus $3 \cdot \infty = \infty$, $1000 \cdot \infty = \infty$, $a \cdot \infty = \infty$ (s. 3. Satz) folgt nach §. 12, 1, Zus.:

I. $\frac{\infty}{3} = \infty$, $\frac{\infty}{1000} = \infty$, $\frac{\infty}{a} = \infty$, oder:

∞ durch jede endliche Zahl dividiert giebt ∞.

II. $\frac{\infty}{\infty} = 3$, $\frac{\infty}{\infty} = 1000$, $\frac{\infty}{\infty} = a$; oder:

$\frac{\infty}{\infty}$ kann jede endliche Zahl vorstellen, ist also eine unbestimmte Gröfse.

12. Aus $\frac{3}{\infty} = 0$, $\frac{1000}{\infty} = 0$, $\frac{a}{\infty} = 0$ (s. 4. Satz) folgt

I. nach §. 13, 4: $\frac{3}{0} = \infty$, $\frac{1000}{0} = \infty$, $\frac{a}{0} = \infty$; oder:

Jede endliche Zahl durch 0 dividiert, giebt ∞.

Dieser Satz könnte auch in folgender Weise bewiesen werden:

$$1:1 = 1,$$

$$1:\frac{1}{10} = 10,$$

$$1:\frac{1}{1000} = 1000,$$

$$1:\frac{1}{1\,000\,000} = 1\,000\,000.$$

Wird der Divisor immer kleiner, so wird der Quotient gröfser (§. 13, 28, 5. Zus.). Die Grenze für das Abnehmen des Divisors ist 0, die Grenze für das Zunehmen des Quotient: ∞, folglich ist:

$$1:0 = \infty, \text{ oder } \frac{1}{0} = \infty.$$

II. Nach §. 13, 5: $0 \cdot \infty = 3$, $0 \cdot \infty = 1000$, $0 \cdot \infty = a$.

Es ist also $0 \cdot \infty$ eine unbestimmte Gröfse.

Anmerkung. Mit noch andern unbestimmten Gröfsen (1^{∞} u. s. w.) macht uns die allgemeine Zahlenlehre bekannt.

13. Aus $1 + 0 = 1$ folgt nun auch $1 - 1 = 0$ und das Rückwärtsschreiten in der natürlichen Zahlenreihe (s §. 8, 1, Zus.) führt damit zu:

$$\ldots . 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.$$

Durch vorstehende Sätze erweitert sich also die natürliche Zahlenreihe zu:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \ldots . . \infty.$$

Ursprünglich giebt es keine anderen als diese natürlichen (oder ganzen) Zahlen. Solche, die dem Werte nach zwischen denselben stehen, können nur durch die natürlichen Zahlen und zwar in Bruchform dargestellt werden.

So ist z. B. $3\frac{5}{7}$, d. i. $3 + \frac{5}{7}$,

gröfser als 3 (s. §. 1, 6) und kleiner als $3+1$, d. i. kleiner als 4 (s. §. 13, 13, 1. Zus.).

Schlufsbemerkung. Bezeichnet man:

die Multiplication (als vereinfachte Addition) mit $\dot{+}$,
die Division (als vereinfachte Subtraktion) mit $\dot{-}$,
das Potenzieren (als vereinfachte Multiplication) mit $\underset{\cdot}{+}$,
das Radicieren (als vereinfachte Division) mit $\underset{\cdot}{-}$,
das Logarithmieren (als vereinfachte Division) mit $\underset{\cdot\cdot}{-}$,

so ist:

$$a - b + b = a,$$

$$a \dot{-} b \dot{+} b = a \text{ (nämlich } a : b \,.\, b = a\text{)},$$

$a \underset{\cdot}{-} b \underset{\cdot}{+} b = b$ (d. i. a durch b radiciert und die entstehende Zahl dann mit b potenziert, also $\left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a$).

Der Satz $a - b + b = a$ nimmt mithin in der Subtraktion dieselbe Stellung ein, wie der Satz $a : b \,.\, b = a$ in der Division und $\left(\sqrt[b]{a}\right)^b$ im Radicieren. In der That werden auch diese Sätze auf gleiche Weise bewiesen (s. oben). Der innige Zusammenhang der 7 Species ist mit dieser Darstellung leicht erkennbar. Man vergleiche auch:

$$(a+d) - (b+d) = a - b \text{ mit } (a \dot{+} d) \dot{-} (b \dot{+} d) = a \dot{-} b,$$
$$\text{d. i. } (a \,.\, d) : (b \,.\, d) = a : b;$$

$$a - (b + c) = a - b - c \text{ mit } a \dot{-} (b \dot{+} c) = a \dot{-} b \dot{-} c,$$
$$\text{d. i. } a : (b \,.\, c) = a : b : c.$$

Vergleicht man $a + 0 = a$ und $a - 0 = a$ mit $a \,.\, 1 = a$ und $a : 1 = a$, so ergiebt sich, dafs 0 in Bezug auf Addition und Subtraktion dasselbe ist, was 1 in der Multiplication und Division (s. auch §. 13, 28).

Bezeichnet man daher 1 mit $\odot$, so gehen vorstehende Sätze über in:

$$a + 0 = a,\quad a - 0 = a,$$

$$a \dot{+} \odot = a,\quad a \dot{-} \odot = a.$$

Die Sätze $0 = a - a$ und $\odot = a \dot{-} a$, d. i. $1 = a : a$, haben daher gleichfalls gleiche Stellung. Wollte man nun 0 als „Differenz aus 2 gleichen Gröfsen" ($0 = a - a$) erklären, so müfste die Einheit als „Quotient aus 2 gleichen Gröfsen" $\left(= \frac{a}{a}\right)$ erklärt werden. Dann aber könnte die Definition für die Einheit erst in der Division gegeben werden, nachdem längst mit der Einheit gerechnet worden ist.

§. 19. Das Zehnersystem.

1. Die Einheiten einer Zahl sind nach dem Zehnersysteme (Decimalsystem, dekadisches System, Dekadik) angeordnet, wenn jede Einheit irgend eine Ordnung (Stelle) 10 Einheiten der nächstniedern (rechts stehenden) Ordnung gilt.

Es gilt daher:

1 Zehner (Zig) = 10 Einer,
1 Hunderter = 10 Zehner = 100 Einer,
1 Tausender = 10 Hunderter = 100 Zehner = 1000 Einer.

In der Zahl	5	8	3	7	6		5	8	3	7	6
unterscheidet man:	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer	oder die Werte der Einheiten sind:	10000	1000	100	10	1

Vorstehende Zahl gilt daher:

5 Zehntausende + 8 Tausende + 3 Hunderte + 7 Zehner + 6 Einer

$= 5 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1$

$= 5 . 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6.$

Ist $a\,b\,c$ eine dreistellige Zahl, sind also a, b und c Ziffern, so enthält dieselbe a Hunderte, b Zehner und c Einer, mithin hat sie den Wert $100\,a + 10\,b + c$.

Jede Zahl, die nach dem im Eingange dieses §. ausgesprochenen Grundsatze angeordnet ist, heifst Decimalzahl, dekadische Zahl, Zahl des Zehnersystems.

2. Um mehrstellige Zahlen lesen zu können, teilt man dieselben von den Einern an in Klassen von je 6 Stellen, die Unionen, Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen, Quintillionen, Sextillionen, Septillionen, Octillionen, Nonillionen, Decillionen, Undecillionen, Duodecillionen, Tredecillionen u. s. w. genannt werden. Jede dieser Klassen teilt man in zwei Unterabteilungen von je drei Stellen, von welchen die höhere den Namen „Tausende" erhält u. s. w.

Um z. B. die Zahl 18446744073709551616 zu lesen, ist dieselbe zunächst abzuteilen:

1	8	4	4	6	7	4	4	0	7	3	7	0	9	5	5	1	6	1	6
Zehner-	Einer-	Hundert-	Zehner-	Einer-	Hundert-	Zehner-	Einer-	Hundert-	Zehner-	Einer-	Hundert-	Zehner-	Einer-	Hundert-	Zehner-	Einer-	Hunderte	Zehner	Einer
		Tausend-						Tausend-						Tausende					
Trill.		Billionen						Millionen						(Unionen)					

Daher gelesen:

18 Trillionen, 4 Hundert 6 und vierzig Tausend 7 Hundert 4 und 4zig Billionen, 73 Tausend 709 Millionen, 551 Tausend 6 Hundert und sechzehn.

Die Tausende sind nie (durch ein Komma) zu bezeichnen (s. Decimalbrüche), die Millionen, Billionen u. s. w. aber teilt man

oft, um die Zahlen bequemer lesen zu können, in folgender Weise ab:

$$18'''446744''073709'551616.$$

Quadrillionen bezeichnet man hierbei mit IV, Quintillionen mit V, Sextillionen mit VI u. s. w.

Für „Tausendmillion“ gebraucht man zuweilen den Ausdruck „Milliarde“.

3. Die Zahlzeichen 0, 1, 2 . . . . . 9 nennt man arabische. Sie sind jedoch nicht eine Erfindung der Araber, sondern der Indier.

Zehn (ursprünglich *dechen*) und zig (*dek*) sind aus dem urindogermanischen *dek* (Finger — die 10 Finger) entstanden; lateinisch *decem* = *dekem*, griechisch *deka*.

Die Wörter „elf“ und „zwölf“ sind aus den altdeutschen Ausdrücken „ein lif“ (daher eilf) und „zwei lif“, d. i. „1 darüber, 2 darüber“, entstanden.

§. 20. Das Rechnen mit ganzen (Decimal-) Zahlen in seinen Grundzügen.

1. Addition.

I. Der Anfänger hat zuerst das „Eins und Eins“ einzuüben:

$$1 + 1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4, \ldots\ldots$$
$$2 + 2 = 4,\ 3 + 2 = 5, \ldots\ldots \text{ bis}$$
$$9 + 9 = 18.$$

II. Damit der Anfänger die Summen, welche gröfser als 10 sind, leichter behält, hat er vorzüglich die Verbindungen

$$9 + 1 = 10,\ 8 + 2 = 10,\ 7 + 3 = 10,\ 6 + 4 = 10,\ 5 + 5 = 10$$

zu beachten, um z. B. $8 + 7$ als

$$8 + 2 + 5 = 10 + 5 = 15 \text{ aufzufassen.}$$

III. Da nur Gleichartiges, also nur Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern u. s. w. addiert werden kann, so addiere

$58 + 736 + 9 + 4162$ in folgender Weise:

$$\begin{array}{r} 58 \\ 736 \\ 9 \\ 4162 \\ \hline 4965 \end{array}$$

Hier erhielt man zuerst 25 Einer, die in 2 Zehner + 5 Einer zu verwandeln waren, um die 2 Zehner mit den Zehnern $5 + 3 + 6$ zu vereinigen u. s. w. Hieraus folgt zugleich, dafs man bei der Addition mit der niedrigsten Stelle beginnt.

2. Subtraktion.

I. Der Anfänger hat zunächst die Umkehrung des „Eins und Eins“ einzuüben. Da $9 + 7 = 16$, so mufs $16 - 7 = 9$ und $16 - 9 = 7$ sein.

II. Für die Subtraktion gilt das in der Addition unter III Gesagte. Daher 8937 — 514 berechnet:

$$\begin{array}{r} 8937 \\ 514 \\ \hline 8423 \end{array}$$

Zuerst 7 — 4 Einer = 3 Einer u. s. w.

III. $\begin{array}{r} 62 \\ 39 \\ \hline \end{array}$? Zunächst 1 Zehner = 10 Einer bei den 6 Zehnern geborgt und der Minuend enthält alsdann in den Zehnern nur noch 5 Einheiten, in den Einern 10 + 2 = 12 Einheiten. Daher:

$$\begin{array}{r} {}^{10} \\ 6.2 \\ 3\ 9 \\ \hline =2\ 3 \end{array}$$ berechnet: 12 — 9 = 3 Einer
5 — 3 = 2 Zehner.

IV. $\begin{array}{r} 4000 \\ 1893 \\ \hline \end{array}$? Da die Zehner und Hunderte keine Einheiten enthalten, so hat man hier zunächst bei den 4 Tausenden 1 Tausender = 10 Hunderte zu borgen. Es entsteht alsdann:

$$\begin{array}{r} {}^{10} \\ 4.0\ 0\ 0 \\ 1\ 8\ 9\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Hierauf ist von den 10 Hunderten 1 Hunderter = 10 Zehner zu borgen. Daher:

$$\begin{array}{r} {}^{10.10} \\ 4.0\ 0\ 0 \\ 1\ 8\ 9\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Endlich ist von den 10 Zehnern 1 Zehner = 10 Einer zu borgen. Daher:

$$\begin{array}{r} {}^{10.10.10} \\ 4.0\ 0\ 0 \\ 1\ 8\ 9\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Der Minuend enthält jetzt 3 Tausende, 9 Hunderte, 9 Zehner und 10 Einer.

Die Subtraktion giebt daher als Rest:

= 2 1 0 7.

Dieses Beispiel führt zu der Regel:

Die Nullen, über welche man hinweggeborgt hat, werden zu Neunen.

3. Multiplication.

I. Der Anfänger hat zunächst das „Einmaleins" (Pythagoräische Tafel) einzuüben:

$1 \cdot 1 = 1,\ 1 \cdot 2 = 2,\ 1 \cdot 3 = 3, \ldots.$

$2 \cdot 2 = 4;\ 2 \cdot 3 = 6,\ 2 \cdot 4 = 8, \ldots.$ bis $9 \cdot 9 = 81.$

II. $36 \cdot 7$? Man denke sich (3 Zehner + 6 Einer) · 7, daher 21 Zehner + 42 Einer. In der Praxis beginnt man jedoch mit der niedrigsten Stelle, daher zuerst 7 · 6 Einer = 42 Einer = 4 Zehner

$+$ 2 Einer; alsdann $7 \cdot 3$ Zehner $=$ 21 Zehner. Jetzt hat man 21 Zehner $+$ 4 Zehner $+$ 2 Einer $=$ 25 Zehner $+$ 2 Einer $=$ 2 Hunderte $+$ 5 Zehner $+$ 2 Einer. Daher:

$$\frac{36 \cdot 7}{= 252.}$$

III. $508 \cdot 6$? Zunächst $6 \cdot 8$ Einer $=$ 48 Einer $=$ 4 Zehner $+$ 8 Einer. Hierauf $6 \cdot 0$ Zehner $=$ 0 Zehner (s. §. 18, 6), hierzu jene 4 Zehner gerechnet, und man hat zusammen $0 + 4 = 4$ Zehner. Endlich 6.5 Hunderte $=$ 30 Hunderte $=$ 3 Tausende $+$ 0 Hunderte. Folglich: $508 \cdot 6 = 3048$.

IV. $956 \cdot 748$? Man denke sich: $956 \cdot$(7 Hunderte $+$ 4 Zehner $+$ 8 Einer)

$= 956 \cdot 7$ Hunderte [$=$ 6692 Hunderte $=$ 669200]
$+ 956 \cdot 4$ Zehner [$=$ 3824 Zehner $=$ 38240]
$+ 956 \cdot 8$ Einer [$=$ 7648 Einer]. Daher:

$$\begin{array}{r} 956 \cdot 748 \\ \hline 6692 \\ 3824 \\ 7648 \\ \hline = 715088 \end{array}$$

Diese Produkte werden „Partialprodukte“ genannt. Addiert geben dieselben das gesuchte Produkt:

V. $5300 \cdot 74000$? Man denke sich:

$53 \cdot 100 \cdot 74 \cdot 1000 = 53 \cdot 74 \cdot 100 \cdot 1000 = 53 \cdot 74 \cdot 100000$.

Man multipliciert daher $53 \cdot 74$ und hängt an das Produkt $2 + 3 = 5$ Nullen.

4. Division.

I. Zunächst hat der Anfänger das Einmaleins umzukehren. Da $7 \cdot 9 = 63$, so mufs $63 : 7 = 9$ und $63 : 9 = 7$ sein.

II. $864 : 2$ kann zwar als (8 H. $+$ 6 Z. $+$ 4 E.)$:2$ $=$(8 H. : 2) $+$ (6 Z. : 2) $+$ (4 E. : 2) (s. §. 13, 12) $=$ 4 H. $+$ 3 Z. $+$ 2 F. oder:

$$\frac{864 : 2}{= 432}$$

berechnet werden, aber nicht immer geht die Division der einzelnen Stellen auf, wie folgendes Beispiel zeigt:

$774 : 3$? Da 6 H. $: 3 =$ 2 H., 9 H. $: 3 =$ 3 H., so liegt hier der Quotient zwischen 2 H. und 3 H. Mithin hätte man sich die Aufgabe zu denken:

(6 H. $+$ 1 H. $+$ 7 Z. $+$ 4 E.)$:3$

und weil 1 H. $=$ 10 Z.:

$=$ (6 H. $+$ 17 Z. $+$ 4 E.)$:3$ u. s. w.

Da also bei der Division von 7 H. $: 3$ vorläufig nur 6 H. durch 3 dividiert werden können, so bleibt 1 Hunderter $=$ 10 Zehner als Rest, so dafs alsdann $10 + 7$ Zehner $=$ 17 Z. durch 3 zu dividieren sind.

Dieses Verfahren ist aber nichts Anderes als die Partialdivision (§. 13, 29). Hieraus folgt, dafs

1. die Division mit den höchsten Stellen des Dividend zu beginnen ist;
2. die Division mehrstelliger Dividenden durch die Partialdivision auszuführen ist.

Vorstehendes Beispiel ist also zu rechnen (vergl. die Beispiele in §. 13, 29, 3. Zus.):

$$\begin{array}{l} 774:3 = 258 \\ \underline{6} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 24, \end{array}$$

abgekürzt:

$$\begin{array}{l} \overset{1\,2}{774}:3 \\ \hline = 258. \end{array}$$

Die kleiner geschriebenen Ziffern 1 und 2 sind die Reste 7 — 6 Hunderte und 17 — 15 Zehner.

III. Wollte man bei 812 : 4 nur 8 : 4 = 2 und 12 : 3 rechnen, ohne Rücksicht auf die Ordnungen der Zahl zu nehmen, also schreiben:

$$\begin{array}{l} 812:4 \\ \hline = 23, \end{array}$$

so würde diese 2 im Quotient: Zehner aber nicht Hunderte (8 H. : 4 = 2 H.!) bedeuten.

Wird dagegen die Partialdivision vollständig angewendet:

$$\begin{array}{l} 812:4 = 203 \\ \underline{8} \\ 1 \text{ Zehner} : 4 = 0 \text{ Zehner!} \\ \underline{0} \\ 12 \text{ Einer} : 4 = 3 \text{ Einer}, \end{array}$$

so erhält man vollkommen richtig 2 als Hunderte und es ergiebt sich, dafs bei der Division nie die *Hauptregel* aufser acht zu lassen ist:

Jede einzelne Stelle des Dividend ist zu dividieren.

Abgekürzt:

$$\begin{array}{l} 8\overset{1}{1}2:4 \\ \hline = 203 \end{array}$$

mit folgender Rechnung:

8 H. : 4 = 2 *Hunderter*; 1 Z. : 4 = 0 *Zehner*. Der Rest 1 Zehner = 10 Einer mit den 2 Einern vereinigt = 12 Einer. Diese durch 4 dividiert = 3 Einer.

IV. Diese Regel mag auch auf folgendes Beispiel angewendet werden:

```
 7696:8=09.. = 9..
 0          TH oder H
---------
 76
 72 u. s. w.
---------
```

Hieraus folgt, dafs man nicht erst 7 Tausende durch 8, sondern sogleich 7 Tausende + 6 Hunderte = 76 Hunderte durch 8 dividiert, also rechnet:

```
 7696:8=962
 72
 ------
  49
  48
 ------
   16
```

```
                4 1
abgekürzt:    7696:8
             --------
               =962.
```

In gleicher Weise verfährt man bei mehrstelligen Divisoren.

Beispiel: $519367 : 874 = 594\frac{211}{874}$.

```
 519367:874=594 211/874.
 4370
 -------
  8236
  7866
 -------
   3707
   3496
 -------
    211
```

Anmerkung. Um bei mehrstelligen Divisoren die jedesmalige Stelle des Quotient leichter bestimmen zu können, denkt man sich zunächst nur die höchsten Stellen des Dividend durch die höchsten Stellen des Divisor dividiert. Z. B.:

4937192 : 78165?

Für die 1. Stelle des Quotient hat man: „49 dividiert durch eine Zahl, die gröfser als 7", oder besser, weil 78 schon nahe 80 ist: „49 dividiert durch eine Zahl, die nahe 8 ist" = 6. So findet man die erste Stelle 6 des Quotient, ohne erst untersuchen zu müssen, welches von den Produkten 78165·5, 78165·6, 78165·7 sich der Zahl 493719 am meisten nähert und nicht gröfser als diese Zahl ist.

§. 21. Andere Zahlensysteme.

Je nachdem die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe durch das Zehner- oder Achtersystem ausgedrückt werden, hat man als Werte der Einheiten der verschiedenen Ordnungen (ausgedrückt durch Decimalzahlen):

$$1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5 \ldots \text{(s. §. 19, 1)}$$

oder: $$1,\ 8,\ 8^2,\ 8^3,\ 8^4,\ 8^5 \ldots \text{d. i.}$$

$$1,\ 8,\ 64,\ 512,\ 4096,\ 32768, \ldots$$

Um die Zahl

5 4 0 7 6 des Achtersystems in eine Zahl des Zehnersystems zu verwandeln, hat man die Anzahl der Einheiten jeder Ordnung, wie sich aus §. 19, 1 ergiebt,

mit 4096 512 64 8 1 zu multiplicieren.

Die gesuchte Zahl des Zehnersystems ist also:

$$= 5 \cdot 4096 + 4 \cdot 512 + 0 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 6 \cdot 1$$
$$= 20480 + 2048 + 0 + 56 + 6 = 22590.$$

Ist umgekehrt die dekadische Zahl 22590 in eine Zahl des Achtersystems, also in eine oktoadische Zahl zu verwandeln, so hätte man zu untersuchen, wie viel Einheiten in der fünften Stelle der oktoadischen Zahl, deren jede 32768 gilt, vorhanden sind, ferner wie viel Einheiten in der vierten Stelle der oktoadischen Zahl, deren jede 4096 gilt, vorhanden sind u. s. w. Da die gegebene Zahl kleiner als 32768 ist, so sind in der fünften Stelle keine Einheiten vorhanden. Die übrigen Stellen ergeben sich durch folgende Division:

$$
\begin{array}{r}
22590 : 4096 = 5 \\
20480 \\
\hline
2110 : 512 = 4 \\
2048 \\
\hline
62 : 64 = 0 \\
0 \\
\hline
62 : 8 = 7 \\
56 \\
\hline
6 : 1 = 6.
\end{array}
$$

Die gesuchte Zahl des Achtersystems ist daher 54076.

Das Zweiersystem heifst auch Dyadik, binarisches System,
„ Dreier „ „ „ Triadik,
„ Vierer „ „ „ Tetradik,
„ Fünfer „ „ „ Pentadik,
„ Sechser „ „ „ Hexadik oder Sehsystem,
„ Siebener „ „ „ Heptadik,
„ Achter „ „ „ Oktoadik,
„ Neuner „ „ „ Enneadik,
„ Elfer „ „ „ Hendekadik,

das Zwölfersystem heifst auch Duodecimalsystem, dodekadisches System, Dekadiadik, Teliosadik,
das Sechzehner „ „ „ Hekkaidekadik, Sedecimalsystem.

Die natürliche Zahlenreihe erhält in den verschiedenen Systemen folgendes Aussehen:

10er-Syst.	2er-Syst.	3er-Syst.	8er-Syst.	12er-Syst.	16er-Syst.	10er-Syst.	2er-Syst.	3er-Syst.	8er-Syst.	12er-Syst.	16er-Syst.
1	1	1	1	1	1	14	1110	112	16	12	*v*
2	10	2	2	2	2	15	1111	120	17	13	*f*
3	11	10	3	3	3	16	10000	121	20	14	10
4	100	11	4	4	4	17	10001	122	21	15	11
5	101	12	5	5	5	18	10010	200	22	16	12
6	110	20	6	6	6	19	10011	201	23	17	13
7	111	21	7	7	7	20	10100	202	24	18	14
8	1000	22	10	8	8	21	10101	210	25	19	15
9	1001	100	11	9	9	22	10110	211	26	1*d*	16
10	1010	101	12	*d*	*d*	23	10111	212	27	1*e*	17
11	1011	102	13	*e*	*e*	24	11000	220	30	20	18
12	1100	110	14	10	*z*	25	11001	221	31	21	19
13	1101	111	15	11	*t*	26	11010	222	32	22	1*d*

Ptolemäus führte ein Sechzigersystem (Sexagesimalsystem) ein, so dafs die Zahl $46^0 17' 25'' 37'''$ (46 Grad 17 Min. 25 Sec. 37 Tertien) in Einheiten der hier niedrigsten, mit $'''$ bezeichneten Stelle den durch eine Decimalzahl ausgedrückten Wert:

$$46 \cdot 60^3 + 17 \cdot 60^2 + 25 \cdot 60 + 37$$
$$= 46 \cdot 216000 + 17 \cdot 3600 + 25 \cdot 60 + 37$$
$$= 9998737''' \text{ erhält.}$$

Die Römer hatten eine Art Fünfersystem mit den folgenden sogenannten römischen Ziffern:

I V X L C D M

im Zehnersystem = 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

Beispiel.

MDCCCXXVIII = 1000 + 500 + 300 + 20 + 5 + 3 = 1828.

Steht eine kleinere Zahl vor einer gröfseren, so ist letztere um die erstere zu vermindern, z. B. IV = 4, IX = 9, XXIX = 10 + 10 + 9 = 29; XC = 90.

§. 22. Vielfaches, Mafs, Arten der Zahlen.

1. 20 ist das 5fache von 4, 36 das 9fache von 4; 20 und 36 sind Vielfache von 4. Die sämtlichen Vielfachen einer ge-

gebenen Zahl erhält man, wenn man dieselbe mit den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe multipliciert. Die Vielfachen von 7 sind also:

$$7 \cdot 0,\ 7 \cdot 1,\ 7 \cdot 2,\ 7 \cdot 3,\ 7 \cdot 4, \ldots \text{ oder}$$
$$0,\ 7,\ 14,\ 21,\ 28, \ldots$$

90 ist ein Vielfaches (Dividuus, Multiplum) von 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90.

2. Die Vielfachen von 1 sind $1 \cdot 0,\ 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 2,\ 1 \cdot 3,\ 1 \cdot 4, \ldots$
oder: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$

Jede natürliche Zahl ist also ein Vielfaches von 1.

3. Die Vielfachen von 0 sind $0 \cdot 0,\ 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 2, \ldots$
oder $0,\ 0,\ 0, \ldots$

0 ist ein Vielfaches jeder Zahl.

4. Die Zahl, von welcher ein Vielfaches gebildet ist, heifst in Bezug auf dasselbe ein Mafs (Teiler, aliquoter Teil, Divisor — Faktor). 5 ist ein Mafs von 35, weil 35 ein Vielfaches von 5 ist.

12 ist ein Mafs von 60, aber auch ein Mafs von 96.

Die Mafse von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12.
„ „ „ 20 „ 1, 2, 4, 5, 10, 20.

5. Hieraus folgt: 1 ist ein Mafs jeder Zahl.

6. Jede Zahl ist ein Mafs von 0; denn 0 ist ein Vielfaches jeder Zahl.

7. Eine Zahl, die kein Mafs einer gegebenen Zahl ist, ist ein aliquanter Teil derselben; z. B. 5 ist ein aliquanter Teil von 24.

8. Primzahl (einfache Zahl, Surtimzahl) ist eine Zahl, die nur 1 und sich selbst als Mafs hat. 5 ist z. B. eine Primzahl, da dieselbe nur 1 und 5 als Mafs hat. 21 ist keine Primzahl, da diese Zahl aufser 1 und 21 noch die Mafse 3 und 7 hat.

Produktzahl (zusammengesetzte Zahl) ist eine Zahl, die aufser 1 und sich selbst noch andere Mafse hat. Z. B. 91, die aufser 1 und 91 noch 7 und 13 als Mafse hat.

Jede Produktzahl kann als ein Produkt aus lauter Primzahlen dargestellt werden. Z. B. $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$.

9. Ist 7 eine Primzahl, so müssen alle höheren Vielfachen von 7, d. i. 14, 21, 28, 35 ...., Produktzahlen sein; denn 14 hat aufser 1 und 14 noch 2 als Mafs u. s. w.

10. 1 ist daher keine Primzahl, weil sonst die Vielfachen von 1, d. i. 2, 3, 4, 5, ... Produktzahlen sein müfsten (s. 4. u. 8. Satz).

Die nächsthöhere natürliche Zahl 2 ist dagegen Primzahl, da sie nur 1 und sich selbst als Mafs hat, während die Vielfachen von 2, d. i. 4, 6, 8, 10, ... Produktzahlen sind. Die nächsthöhere natürliche Zahl 3 ist wieder Primzahl, während die Viel-

fachen von 3, d. i. 6, 9, 12, ... Produktzahlen sind. Es folgt 4, diese aber ist schon als Produktzahl bestimmt. Die nun folgende 5 ist weder bei 2, noch 3, noch 4 berührt worden, daher Primzahl. Folglich:

Primzahlen	Produktzahlen
2	4, 6, 8, 10, 12, ...
3	6, 9, 12, 15, ...
5	10, 15, 20, 25, ...
7	14, 21, 28, 35, ...
11	22, 33, 44, 66, ...

Somit erklärt sich der Name Primzahl. Es ist 2 in der betreffenden Reihe 2, 4, 6, 8, ... die erste Zahl (*primus numerus*).

11. Die Vielfachen von 2, also 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., nennt man gerade Zahlen. Die Zehner, Tausende, Hunderttausende u. s. w. einer Zahl, d. i. die 2., 4., 6. Ordnung u. s. w., sind mithin geradzahlige Ordnungen.

Jede Zahl, die 2 nicht als Mafs hat, heifst ungerade Zahl, z. B. 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Die Einer, Hunderte, Zehntausende einer Zahl sind ungeradzahlige Ordnungen.

Auf Nullen sich endigende Zahlen nennt man runde Zahlen; z. B. 70, 23000, 10000.

12. Um sämtliche Primzahlen aufzufinden, kann man das in 10 gegebene Verfahren noch abkürzen. Da die Vielfachen von 2: Produktzahlen sind, so notiere man nur die ungeraden Zahlen in folgender Weise:

	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89
91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119
121	123	125	127	129	131	133	135	137	139	141	143	145	147	149
151	153	155	157	159	161	163	165	167	169	171	173	175	177	179
181	183	185	187	189	191	193	195	197	199	201	203	205	207	209

In dieser Tabelle behalte man zuerst 3 als Primzahl und streiche jede dritte Zahl (9, 15, 21, 27, ...) als Produktzahl. Hierauf behalte man die auf jene 3 folgende, zuerst nicht gestrichene Zahl als Primzahl; es ist dies 5.

Streiche alsdann $5^2 = 25$ und von 25 an jede fünfte Zahl (35, 45, 55, ...) als Produktzahl.

Die nach 5 zuerst nicht gestrichene Zahl 7 ist nun als Primzahl zu behalten, alsdann $7^2 = 49$ und von 49 an jede siebente Zahl (63, 77, ...) zu streichen u. s. w.

Nicht von 7 an, sondern erst von $7^2 = 49$ an ist jede siebente Zahl zu streichen, weil die hier vorhandenen Vielfachen zwischen

$1 \cdot 7$ und $7 \cdot 7$ ($= 49$), d. i. $3 \cdot 7$ und $5 \cdot 7$, als Vielfache von 3 und 5 schon gestrichen sein müssen.

Hat man diese Operation bis zu irgend einer Primzahl (z. B. 19) vorgenommen, so müssen alle nichtgestrichenen Zahlen, die kleiner sind als das Quadrat der nächsten Primzahl (kleiner als 23^2 oder 529) Primzahlen sein, weil z. B. nach 19 die Zahl 23 als Primzahl folgt und nun die zuerst zu streichende Zahl $23^2 = 529$ ist.

Das hier gelehrte Verfahren nennt man das Sieb des Eratosthenes.

13. Zwischen 1 und 1100 liegen folgende Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167. 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097.

Die Anzahl der Primzahlen beträgt:

bis 100	25	bis 700	125	bis 5000	669
„ 200	46	„ 800	139	„ 10000	1229
„ 300	62	„ 900	154	„ 50000	5133
„ 400	78	„ 1000	168	„ 100000	9591
„ 500	95	„ 1100	184	„ 500000	41537
„ 600	109	„ 2000	303	„ 1000000	78492.*)

14. Ein Gesetz giebt es nicht, durch welches man bestimmen könnte, ob eine gegebene Zahl Primzahl ist oder nicht. Offenbar können sich die Primzahlen, welche > 5 sind, nur auf 1, 3, 7, 9 endigen.

Alle Primzahlen, die > 3, sind in der Form $6n \pm 1$ vorhanden. Z. B. $31 = 6 \cdot 5 + 1$; $41 = 6 \cdot 7 - 1$.

---

*) Annähernd ist die Anzahl der Primzahlen bis zur Zahl n:

$$= \frac{n}{lg\ nat\ n - 1}.$$

Zu beachten ist, daſs folgende Formen Primzahlen sind:

$[2 \cdot 3] \pm 1$	$[2 \cdot 3 \cdot 5] \cdot 2 - [(2 \cdot 3) \cdot 3 - 1]$
$[2 \cdot 3] \cdot 2 \pm 1$	„ $\mp [(2 \cdot 3) \cdot 3 + 1]$
$[2 \cdot 3] \cdot 3 \pm 1$	„ $\mp [(2 \cdot 3] \cdot 4 - 1]$
$[2 \cdot 3 \cdot 5] \mp 1$	$[2 \cdot 3 \cdot 5] \cdot 3 - 1$
„ $\mp [(2 \cdot 3) + 1]$	„ $\mp [(2 \cdot 3) + 1]$
„ $\mp [(2 \cdot 3) \cdot 2 \pm 1]$	„ $\mp [(2 \cdot 3) \cdot 2 - 1]$
„ $\mp [(2 \cdot 3) \cdot 3 - 1]$	„ $+ [(2 \cdot 3) \cdot 2 + 1]$
$[2 \cdot 3 \cdot 5] \cdot 2 \mp 1$	„ $\mp [(2\ 3) \cdot 3 \mp 1]$
„ $\mp [(2 \cdot 3) + 1]$	„ $\mp [(2 \cdot 3) \cdot 4 - 1]$
„ $+ [(2 \cdot 3) \cdot 2 - 1]$	$[2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7] + 1$; u. s. w.
„ $\mp [(2 \cdot 3) \cdot 2 + 1)$	

15. Die gemeinsamen Maſse (gemeinsamen Teiler oder gemeinsamen Divisoren) von 12 und 18 sind 1, 2, 3, 6; von 20 und 30: 1, 2, 3, 5, 10; von 350 und 420: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70.

Da 1 ein Maſs jeder Zahl ist, so muſs 1 auch stets das gemeinsame Maſs von mehreren gegebenen Zahlen sein.

Zwei verschiedene Vielfache einer dritten Zahl (z. B. 42 und 70 als Vielfache von 7) haben selbstverständlich diese dritte Zahl (7) als gemeinsames Maſs.

16. Das gröſste gemeinsame Maſs (der gröſste gemeinsame Divisor) von 12 und 18 ist 6 (s. Satz 15), von 20 und 30: 10, von 350 und 420: 70. Das gröſste gemeinsame Maſs von 112, 168 und 240 ist 8, denn es giebt keine gröſsere Zahl, die ein Maſs aller drei Zahlen wäre.

17. Zahlen, die auſser 1 kein gemeinsames Maſs haben, heiſsen Primzahlen unter sich oder relative Primzahlen, z. B. 37 und 53, oder 23 und 30, oder 25 und 63. Man sagt: „37 ist prim zu 53“ oder „37 und 53 sind prim zu einander“. Von den relativen Primzahlen 23 und 30 ist 23 (nach Satz 8) für sich allein betrachtet Primzahl, also eine absolute Primzahl, 30 Produktzahl. Zahlen, die ein gröſseres gemeinsames Maſs als 1 haben, heiſsen relativ zusammengesetzte Zahlen oder relative Produktzahlen, z. B. 18, 33.

18. Die Vielfachen
von 12 sind 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**, 120, ...
„ 18 „ 18, **36**, 54, **72**, 90, **108**, ...
Es sind also, von 0 abgesehen, 36, 72, 108, 144, 180, ... „gemeinsame Vielfache“ von 12 und 18. Unter diesen ist 36 das „kleinste gemeinsame Vielfache“ (der kleinste gemeinsame Dividuus) von 12 und 18.

Von 20 und 30 ist 60 das kleinste gemeinsame Vielfache (10 das gröfste gemeinsame Mafs); von 18, 24 und 30 ist 360 das kleinste gemeinsame Vielfache.

19. Denkt man sich eine Produktzahl als Produkt von lauter Primzahlen, so ist jeder Faktor ein „Primfaktor“ oder „einfacher Faktor“ oder „kleinster Faktor“ der gegebenen Zahl. So ist z. B. $60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ (oder $2^2 \cdot 3 \cdot 5$). Es sind also 2, 3 und 5 die Primfaktoren von 60.

$$1584 = 12 \cdot 132 = 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \text{ (oder } = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11).$$

Die Primfaktoren von 1584 sind also 2, 3 und 11.

§. 23. Einige Eigenschaften der Zahlen. Allgemeine Sätze der Teilbarkeit. Kettendivision.

1. „35 ist ein Vielfaches von 7“, oder: „7 ist ein Mafs von 35“, oder: „die Division 35 : 7 geht auf (giebt als Quotient eine ganze Zahl ohne Rest)“, oder: „35 ist durch 7 teilbar“. Diese Ausdrücke sind gleichbedeutend, so dafs für den einen der andere gesetzt werden kann. Ist z. B. 2 ein Mafs von 14, so ist 14 durch 2 teilbar. (Unter „teilbar“ versteht man „ohne Rest teilbar“).

Eine Zahl, die durch eine andere nicht teilbar, läfst, durch diese letztere dividiert, einen Rest (s. §. 13, 29, 3. Zus.)

Beispiel: $17 : 3 = 5$, Rest 2. Vollständig: $17 : 3 = 5 + \frac{2}{3}$.

Ist umgekehrt $\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$, so sagt man auch dafür: D durch d dividiert, giebt den Rest r.

2. Die Vielfachen von 2 sind: $2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4 \ldots$ allgemein $2n$, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Eine Zahl, die durch 2 teilbar ist, ist nach dem 1. Satze ein Vielfaches von 2, also ist $2n$ durch 2 teilbar. Eine durch 5 teilbare Zahl kann daher $5n$ geschrieben werden.

Zusatz. Eine gerade Zahl bezeichnet man mit $2n$.

3. Eine Zahl D, die durch 2 dividiert irgend eine ganze Zahl n als Quotient und 1 als Rest giebt, führt nach dem 1. Satze zu der Gleichung:

$D : 2 = n + \frac{1}{2}$. Da nun der Divisor mit dem Quotient multipliciert den Dividend giebt, so ist jene Zahl D

$$= 2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot n + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2n + 1 \text{ (s. §. 11, 4 und §. 13, 10).}$$

Eine Zahl, die durch 2 dividiert den Rest 1 giebt, schreibt man daher $2n + 1$.

Eine Zahl D, die durch 7 dividiert die ganze Zahl n als Quotient und 5 als Rest giebt, führt zu $D:7 = n + \frac{5}{7}$. Folglich mufs $D =$ Dsr. $\times$ Quot. $= 7\left(n + \frac{5}{7}\right) = 7n + 5$ sein, d. h. eine Zahl, die durch 7 dividiert den Rest 5 giebt, kann $7n + 5$ geschrieben werden.

Zusatz. Eine ungerade Zahl bezeichnet man mit $2n + 1$.

4. 0 ist durch jede Zahl teilbar; denn 0 ist ein Vielfaches jeder Zahl (§. 22, 3). Z. B.: $0:29 = 0$ (ohne Rest).

5. Jede Zahl ist durch 1 teilbar; denn 1 ist ein Mafs jeder Zahl (§. 22, 5). Z. B.: $37:1 = 37$ (ohne Rest).

6. Sind a und b ganze Zahlen, so ist ab sowohl durch a als auch durch b teilbar; denn $\frac{ab}{a} = b$ (ohne Rest).

Läfst sich daher eine Zahl als Produkt aus 2 andern Zahlen darstellen, so ist sie durch jeden dieser Faktoren teilbar.

Beispiel: $ab + ac = a(b + c)$. Folglich ist $ab + ac$ sowohl durch a als auch durch $b + c$ teilbar.

7. Ist 21 ein Vielfaches von 3, so ist auch $21 \cdot 13$ ein Vielfaches von 3. Allgemein:

Ist a ein Vielfaches von m, so ist auch ab ein Vielfaches von m.

Beweis. Ist $a = dm$, so ist $ab = dm \cdot b = bdm$, folglich nach dem 6. Satze ein Vielfaches von m.

Derselbe Satz kann zufolge des 1. Satzes auch ausgesprochen werden:

Ist a durch m teilbar, so ist auch ab durch m teilbar.

Bezeichnet man ein Vielfaches von 7 mit V_7, ein Vielfaches von n mit V_n, so ist also (siehe vorstehendes specielle Beispiel) $13 \cdot V_3 = V_3$, d. h. das 13fache eines Vielfachen von 3 ist wieder ein Vielfaches von 3.

8. Ist jede von 2 Zahlen durch eine dritte teilbar, so ist auch die Summe oder Differenz jener beiden durch die dritte teilbar.

Beispiel: 77 und 28 sind durch 7 teilbar, folglich ist auch $77 + 28 = 105$ oder $77 - 28 = 49$ durch 7 teilbar.

Beweis. am und bm sind durch m teilbar. Nun ist $am \pm bm = (a \pm b)m$, folglich durch m teilbar (s. 6. Satz).

Derselbe Satz kann auch (s. 1. Satz) ausgesprochen werden:

Die Summe oder Differenz zweier Vielfachen einer Zahl ist auch ein Vielfaches derselben Zahl.

Es ist also $V_{11} + V_{11} = V_{11}$, d. i. ein Vielfaches von 11 vermehrt um ein beliebiges andere Vielfache von 11, giebt wieder ein Vielfaches von 11.

9. Derselbe Satz allgemeiner:

Ist jede von 2 Zahlen durch eine dritte teilbar, so ist auch die Summe oder Differenz von beliebigen Vielfachen jener beiden Zahlen durch die dritte teilbar.

Beispiel: 39 und 24 sind durch 3 teilbar, folglich mufs auch $10 \cdot 39 - 11 \cdot 24$, d. i. $390 - 264 = 126$ durch 3 teilbar sein.

Beweis. am und bm sind durch m teilbar. Ein Vielfaches der ersten Zahl sei amn, der zweiten bmr. Nun ist

$$amn \pm bmr = (an \pm br)m,$$

folglich durch m teilbar.

10. Zwei auf einander folgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind stets relative Primzahlen. Z. B. 34 und 35.

Beweis. Hätten sie aufser 1 ein gröfseres gemeinsames Mafs, so müfste dieses (nach Satz 8) auch ein Mafs ihrer Differenz, d. i. ein Mafs von 1 sein, was unmöglich ist.

11. Ist nur eine von 2 Zahlen durch eine dritte teilbar, so kann auch die Summe oder Differenz jener beiden durch die dritte nicht teilbar sein.

Beispiel: 78 durch 13 teilbar, 30 nicht durch 13 teilbar, folglich ist $78 + 30 = 108$ nicht durch 13 teilbar.

Beweis. Ist a durch m teilbar, b nicht, so kann man $a = dm$ setzen. Dann ist $a \pm b = dm \pm b$. Diese Zahl durch m dividiert giebt

$$\frac{a \pm b}{m} = \frac{dm \pm b}{m} = \frac{dm}{m} \pm \frac{b}{m} = d \pm \frac{b}{m}.$$

Da nun b kein Vielfaches von m ist, so ist $\frac{b}{m}$ keine ganze Zahl, folglich auch $d \pm \frac{b}{m}$, d. i. $\frac{a \pm b}{m}$, keine ganze Zahl.

12. Ist eine Zahl durch eine zweite, der Quotient durch eine dritte Zahl, der neue Quotient durch eine vierte Zahl teilbar, so mufs auch die erste Zahl durch das Produkt der zweiten, dritten und vierten Zahl teilbar sein.

Beispiel:

2520	ist durch	4	teilbar;	$2520 : 4 = 630$;
630	„ „	3	„	$630 : 3 = 210$;
210	„ „	7	„	$210 : 7 = 30$.

Folglich ist 2520 durch $4 \cdot 3 \cdot 7$, d. i. 2520 durch 84 teilbar.

Beweis. Die 4 Zahlen seien a, b, c, d. Ist nun $a : b = m$, $m : c = n$, $n : d = p$, so ist I. $a = bm$, II. $m = cn$, III. $n = dp$.

Setzt man in II für n: dp (s. III), so entsteht $m = c \cdot dp = cdp$, und setzt man in I für m dieses Produkt cdp, so entsteht $a = bcdp$. Diese Zahl aber ist durch bcd teilbar.

13. Ist eine Zahl durch eine zweite nicht teilbar, so kann sie auch nicht durch ein Vielfaches der zweiten teilbar sein.

Beweis. Ist a nicht durch b teilbar und setzt man das Vielfache von $b = bm$, so ist:

$$a:(bm) = \frac{a}{bm} = \frac{a}{b} : m \text{ (s. §. 13, 23).}$$

Da nun schon $\frac{a}{b}$ keine ganze Zahl ist, so kann es auch $\frac{a}{b}:m$ nicht sein.

14. Um das gröfste gemeinsame Mafs zweier Zahlen zu suchen, dividiert man die gröfsere Zahl durch die kleinere, den jedesmaligen Divisor durch den Rest, bis die Division aufgeht (sogenannte fortgesetzte oder Ketten-Division). Alsdann ist der letzte Divisor das gröfste gemeinsame Mafs.

1. Beispiel: 667 und 1541.

$$\begin{array}{l} 1541 : 667 = 2 \\ 1334 \\ \hline 667 : 207 = 3 \\ 621 \\ \hline 207 : 46 = 4 \\ 184 \\ \hline 46 : 23 = 2 \\ 46 \\ \hline 0 \end{array}$$

Der letzte Divisor 23 ist das gröfste gemeinsame Mafs der Zahlen 667 und 1541.

2. Beispiel: 131 und 283.

$$\begin{array}{l} 283 : 131 = 2 \\ 262 \\ \hline 131 : 21 = 6 \\ 126 \\ \hline 21 : 5 = 4 \\ 20 \\ \hline 5 : 1 = 5 \\ 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

Der letzte Divisor 1 ist das gröfste gemeinsame Mafs von 131 und 283, d. h. 131 und 283 sind relative Primzahlen.

Beweis. (Siehe das 1. Beispiel). Da die Division 46 : 23 aufging, so ist 46 ein Vielfaches von 23 (Dividend 46 = Divisor 23 × Quot. 2). Folglich ist auch 46 · 4, d. i. 184, ein Vielfaches von 23 (s. 7. Satz). Nun mufs auch (s. §. 9, 4 und §. 23, 8) 184 + 23 = 207 ein Vielfaches von 23 sein. Schreitet man weiter zurück, so findet man, dafs auch 3 · 207 = 621, dann 621 + 46 = 667, 2 · 667 = 1334, und endlich 1334 + 207 = 1541 Vielfache von 23 sein müssen oder 23 ein Mafs von 667 und 1541 sein mufs. Noch ist aber nachzuweisen, dafs der letzte Divisor 23 das gröfste gemeinsame Mafs sein mufs. Jedes gemeinsame Mafs von 1541 und 667 ist nach dem 9. Satze auch ein Mafs von 1541 — 2 . 667, d. i. ein Mafs des 1. Restes 207. Jedes Mafs aber von 667 und 207 mufs auch ein Mafs von 667 — 3 · 207, d. i. ein Mafs des 2. Restes 46 sein. Endlich mufs jedes Mafs von 207 und 46 auch ein Mafs von 207 — 4 · 46, d. i. ein Mafs des letzten Divisor 23 sein. Hieraus folgt nun, dafs jedes Mafs der gegebenen Zahlen 1541 und 667 auch ein Mafs des letzten Divisor sein mufs, folglich können 1541 und 667 kein gröfseres gemeinsames Mafs als den letzten Divisor 23 haben.

1. Zusatz. Mithin ist der letzte Divisor ein Mafs aller in der Kettendivision vorkommenden Zahlen, z. B. aller Reste.

2. Zusatz. Da jeder Rest kleiner als der Divisor, jeder Rest also kleiner als der vorhergehende Rest sein mufs, so kann die Kettendivision nicht aus unendlichvielen Zahlen, sondern aus einer begrenzten Anzahl von Zahlen bestehen. Denn wenn im 2. Beispiele jeder folgende Rest nur um 1 kleiner als der vorhergehende wäre, so müfste der 131. Rest = 0 sein.

15. Erste Abkürzung des vorstehenden Verfahrens, das gröfste gemeinsame Mafs zu finden.

Aus den gegebenen Zahlen und jedem Reste kann man immer durch Division diejenigen Mafse entfernen, welche gemeinsame Mafse der gegebenen Zahlen nicht sind.

Beispiel: 141337 und 79771.

141337 : 79771 = 1
79771
..... : 61566.

Anstatt mit 79771 : 61566 fortzufahren, kann man zuvor aus 61566 die Mafse 2 und 3 ausscheiden, da diese gemeinsame Mafse der beiden gegebenen Zahlen nicht sind.

Mithin ..... : 61566 durch 2 · 3, d. i. 6, dividiert:
79771 : 10261 = 7
71827
..... : 7944.

Hier läfst sich 7944 zuerst durch 4 = 1986, diese Zahl 1986 aber auch noch durch 6 dividieren = 331. Daher:

$$\begin{array}{l} 10261:331=31 \\ \underline{\ 993\ } \\ \ \ 331 \\ \underline{\ \ 331\ } \\ \ \ \ \ 0. \end{array}$$

Der letzte Divisor 331 ist also das gröfste gemeinsame Mafs.

Beweis. Sind die Zahlen amn und amr gegeben, m das gröfste gemeinsame Mafs beider Zahlen, n kein Mafs der zweiten, r kein Mafs der ersten Zahl, so kann man n und r durch Division entfernen, immer mufs das gröfste gemeinsame Mafs m noch in den übrig bleibenden Quotienten am und bn enthalten sein.

16. Zweite Abkürzung.

Als Quotient nimmt man statt der nächst kleineren ganzen Zahl die nächstgröfsere, wenn das Produkt aus dem Quotient und Divisor um den Dividend vermindert einen noch kleineren Rest giebt, oder wenn sich aus dem Rest leicht fremde Mafse ausscheiden lassen.

1. Beispiel. 3379 und 9701.

Der Zahl 9701 liegt $3 \cdot 3379$ näher als $2 \cdot 3379$, folglich wird man auch mit dem Quotient 3 einen kleineren Rest erzielen und daher die Kettendivision schneller beendigen.

$$\begin{array}{l} 9701:3379=3 \\ \underline{10137} \\ \ldots\ldots:436 \text{ (4 ausgeschieden:)} \\ 3379:109=31 \\ \underline{327} \\ \ \ 109 \\ \underline{\ \ 109} \\ \ \ \ \ 0. \end{array}$$

109 das gröfste gemeinsame Mafs.

Beweis. Haben 9701 und 3379 ein gemeinsames Mafs m, so hat nach dem 9. Satze nicht nur $9701 - 2.3379$ dasselbe gemeinsame Mafs m, sondern auch $3 \cdot 3379 - 9701$.

2. Beispiel. 35501 und 46883.

$$\begin{array}{l} 46883:35501=1 \\ \underline{35501} \\ \ldots\ldots:11382 \text{ (6 ausgeschieden:)} \\ 35501:1897=19 \\ \underline{1897} \\ 16531 \\ \underline{17073 \text{ (!)}} \\ \ldots\ldots:542 \text{ (2 ausgeschieden:)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1897 : 271 = 7 \\ 1897 \\ \hline 0. \end{array}$$

271 das gröfste gemeinsame Mafs.

3. Beispiel. 47053 und 78703.

Obgleich 2·47053 der Zahl 78703 näher liegt, so nimmt man doch nur 1 als Quotient, da sich aus dem Rest leichter Mafse ausscheiden lassen.

$$\begin{array}{rl} 78703 : 47053 = 1 & \\ 47053 & \\ \hline \ldots : 31650 & (10 \text{ entfernt:}) \\ \ldots : 3165 & (\ 5 \quad „ \quad) \\ \ldots : 633 & (\ 3 \quad „ \quad) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47053 : 211 = 223 \\ 422 \\ \hline 485 \\ 422 \\ \hline 633 \\ 633 \\ \hline 0. \end{array}$$

211 das gröfste gemeinsame Mafs.

17. Dritte Abkürzung.

Erkennt man sogleich, dafs eine Zahl prim zu einer frühern sein mufs, so setzt man die Division nicht fort, weil dann auch die gegebenen Zahlen prim zu einander sein müssen (s. Satz 14, 1. Zus.).

Im 2. Beisp. des 14. Satzes kann die Kettendivision mit dem Reste 5 beendet werden, weil 21 und 5 relative Primzahlen sind, folglich auch 283 und 131.

Anmerkung. Wie das gröfste gemeinsame Mafs auf Grund dieses und des folgenden Paragraphen immer in kürzester Weise gefunden wird, lehrt §. 26.

18. Um das gröfste gemeinsame Mafs dreier Zahlen zu finden, sucht man dasselbe zunächst von 2 Zahlen und hierauf das gröfste gemeinsame Mafs zwischen dem soeben gefundenen und der dritten Zahl.

Beispiel: 37453, 51389, 85961.

$$\begin{array}{rl} 51389 : 37453 = 1 & \\ 37453 & \\ \hline \ldots : 13936 & (8 \text{ entfernt:}) \\ \ldots : 1742 & (2 \quad „ \quad) \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
37453 : \ \ 871 = 43 \\
3484 \\
\hline
\ \ 2613 \\
\ \ 2613 \\
\hline
\ \ \ \ 0.
\end{array}
$$

Zwischen 871 (dem gröfsten gemeinsamen Mafse von 37453 und 51389) und der dritten Zahl 85961 ist nun das gewünschte Mafs zu suchen.

$$
\begin{array}{l}
85961 : 871 = 99 \\
7839 \\
\hline
\ \ 7571 \\
\ \ 7839 \\
\hline
\ldots : 268 \ (4 \text{ entfernt:}) \\
871 : \ \ 67 = 13 \\
67 \\
\hline
201 \\
201 \\
\hline
\ \ 0.
\end{array}
$$

67 das gröfste gemeinsame Mafs der gegebenen 3 Zahlen.

19. 120 ist sowohl durch 6, als auch durch 15 teilbar, nicht aber unbedingt durch $6 \cdot 15 = 90$, weil 6 und 15 nicht Primzahlen unter sich sind.

120 ist durch 3 und durch 8, folglich auch unbedingt durch $3 \cdot 8 = 24$ teilbar, weil 3 prim zu 8 ist.

Allgemein: Ist a durch b und durch c teilbar, so ist a nur dann unbedingt durch bc teilbar, wenn b prim zu c ist.

Beweis. Da 6 und 15 nicht Primzahlen unter sich sind, so haben sie ein gröfseres gemeinsames Mafs als 1, es ist dies die Zahl 3. Der Voraussetzung gemäfs ist nun 120 durch $6 = 2 \cdot 3$ und durch $15 = 5 \cdot 3$, d. h. durch 3 teilbar. Daraus folgt aber nicht, dafs 120 auch durch $6 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2$, d. h. durch 3^2 teilbar sein mufs.

Sind die beiden Zahlen nun nicht 6 und 15, sondern 3 und 8, so ist das gemeinsame Mafs nur 1, und 120 ist dann nicht nur durch $3 \cdot 1$ und $8 \cdot 1$, d. h. durch 1, sondern offenbar auch durch $3 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 = 3 \cdot 8 \cdot 1^2$, d. i. durch $1^2 = 1$ teilbar.

20. Es giebt unendlich viele Primzahlen.

Beweis. Es seien die Primzahlen bis 97 bekannt. Wird es nun noch Primzahlen geben, die gröfser als 97 sind?

Multipliciert man die sämtlichen bekannten Primzahlen

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots\ldots \text{ bis } 97$$

mit einander, so mag man eine Zahl a erhalten. Aber $a + 1$ ist nach dem 10. Satze prim zu a, folglich ist $a + 1$ durch keine der in a enthaltenen Zahlen, d. i. durch keine der Primzahlen

2, 3, ... bis 97, teilbar. Mithin ist $a+1$ entweder selbst Primzahl, oder durch eine Primzahl teilbar, die gröfser als 97 ist. Folglich giebt es gröfsere Primzahlen als 97.

§. 24. Teilbarkeit bestimmter Zahlen.

1. Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn es die letzte Stelle ist (wenn die letzte Stelle 0, 2, 4, 6 oder 8).

Beispiel: 7438 durch 2 teilbar, weil 8 durch 2 teilbar.

Beweis. $7438 = 743 \cdot 10 + 8$. Jede Zahl aber läfst sich in ein Vielfaches von 10 vermehrt um die Einer, d. i. in „V_{10} + Einer" zerlegen. Sind nun die Einer ein Vielfaches von 2, so geht vorstehende Summe mit Rücksicht darauf, dafs ein V_{10} auch ein V_2 ist, über in $V_2 + V_2 = V_2$ (s. § 23, 8 u. 9), d. h. die Zahl ist durch 2 teilbar.

2. Eine Zahl ist durch 4, 8, 16, 32, ... teilbar,
wenn resp. die 2, 3, 4, 5, ... letzten Stellen
durch 4, 8, 16, 32, ... teilbar sind.

Beispiele:

47924 ist durch 4 teilbar, weil es 24 ist;
38197640 „ „ 8 „ „ „ 640 „
730000 „ „ 16 „ „ 0000, d. i. 0 durch 16 teilbar ist.

Beweis. $47924 = 479 \cdot 100 + 24$. Da das Vielfache von 100 stets auch ein V_4 ist, so geht, wenn die letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind, die Zahl über in $V_4 + V_4 = V_4$, also durch 4 teilbar.

$$38197640 = 38197 \cdot 1000 + 640 = V_8 + 640 \text{ u. s. w.}$$

3. Andere Regeln für die Teilbarkeit durch 4, 8, 16, ...

I. Man vergleiche die vorletzte Stelle der Zahl mit der Hälfte der letzten Stelle. Sind beide gerade oder beide ungerade, so ist die Zahl durch 4 teilbar.

Beispiel: 47476. Die vorletzte Stelle 7 ist ungerade, die Hälfte der letzten $= \frac{6}{2} = 3$ auch ungerade, folglich ist diese Zahl durch 4 teilbar.

Beweis. Die Zahl mag z Zehner und e Einer haben, also $10z + e$ gelten (s. §. 19, 1). Sind nun z und $\frac{e}{2}$ gerade und zwar $z = 2z'$, $\frac{e}{2} = 2e'$, so ist $e = 4e'$ und $10z + e$ geht über in

$$10 \cdot 2z' + 4e' = 20z' + 4e' = 4(5z' + e'),$$

folglich durch 4 teilbar. Sind z und $\frac{e}{2}$ ungerade und zwar

$$z = 2z' + 1, \quad \frac{e}{2} = 2e' + 1,$$

so ist $e = 4e' + 2$ und $10z + e$ geht über in:

$$10(2z' + 1) + 4e' + 2 = 20z' + 4e' + 12 = 4(5z' + e' + 3),$$

folglich durch 4 teilbar.

II. Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die drittletzte Stelle und der vierte Teil der beiden letzten Stellen zugleich gerade oder zugleich ungerade sind.

Beispiel: 987632 ist durch 8 teilbar, weil sowohl 6 als auch $\frac{32}{4} = 8$ gerade ist.

III. Eine Zahl ist durch 16 teilbar, wenn die viertletzte Stelle und der achte Teil der beiden letzten Stellen zugleich gerade oder zugleich ungerade sind.

Anmerkung. Nachstehende Regeln sind weniger praktisch: Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die Summe aus der letzten Stelle und dem Doppelten der vorletzten durch 4 teilbar ist. Z. B. 93876, denn $6 + 2 . 7 = 20$ ist durch 4 teilbar.

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die Summe aus der letzten Stelle, dem Doppelten der vorletzten und dem Vierfachen der drittletzten durch 8 teilbar ist.

4. Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn es die letzte Stelle ist (wenn also die letzte Stelle 0 oder 5 ist).

Beispiel. 719235 ist durch 5 teilbar, weil sich die Zahl auf 5 endigt.

Beweis. $71923 \cdot 10 + 5 = V_{10} +$ Einer. Sind die Einer $= V_5$, so wird die Zahl $V_{10} + V_5 = V_5 + V_5 = V_5$, also durch 5 teilbar.

5. Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn es die zwei letzten Stellen sind (wenn sich die Zahl also auf 00, 25, 50 oder 75 endigt).

Beispiel. 79275 durch 25 teilbar, weil die beiden letzten Stellen 75 durch 25 teilbar sind.

Beweis. $79275 = 792 \cdot 100 + 75 = V_{100} + 75 = V_{25} + 75$ u. s. w.

2. Regel. Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn das Doppelte der Zehner um den fünften Teil der Einer vermehrt eine Zahl giebt, die durch 5 teilbar ist.

Beispiel: 119675. Hier ist $2 \cdot 7 + \frac{5}{5} = 14 + 1 = 15$ durch 5 teilbar, folglich auch die ganze Zahl.

Beweis.

$$\frac{10z + e}{25} = \frac{(10z + e) : 5}{5} = \frac{2z + \frac{e}{5}}{5}.$$

6. Eine Zahl ist durch 125 teilbar, wenn es die 3 letzten Stellen sind (wenn sich also die Zahl auf 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 endigt).

Beispiel: 3441875 ist wegen 875 durch 125 teilbar.

Beweis. $3441 \cdot 1000 + 875 = V_{1000} + 875$ u. s. w.

2. Regel. Eine Zahl ist durch 125 teilbar, wenn das Vierfache der Hunderte um den fünfundzwanzigsten Teil der beiden letzten Stellen vermehrt eine Zahl giebt, die durch 5 teilbar ist.

7. Eine Zahl ist durch 625, 3125, ... teilbar,
wenn resp. die 4, 5, ... letzten Stellen
durch 625, 3125, ... teilbar sind.

8. Quersumme ist die Summe der Einheiten aller Ordnungen einer Zahl. Die Quersumme von 1883 ist:

$$1 + 8 + 8 + 3 = 20.$$

9. Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Beweis. Es ist
$$10 = 3 \cdot 3 + 1 = V_3 + 1;$$
$$100 = 3 \cdot 33 + 1 = V_3 + 1;$$
$$1000 = 3 \cdot 333 + 1 = V_3 + 1 \text{ u. s. w.}$$

Nun ist z. B.
$$\begin{aligned} 867 &= 8 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 \\ &= 8 \cdot (V_3 + 1) + 6 \cdot (V_3 + 1) + 7 \\ &= 8 \cdot V_3 + 8 + 6 \cdot V_3 + 6 + 7 \\ &= (8 \cdot V_3 + 6 \cdot V_3) + (8 + 6 + 7). \end{aligned}$$

Da nun der erste Teil stets ein V_3 und der zweite Teil die Quersumme ist, so wird also 867, überhaupt aber jede Zahl $= V_3 +$ Quersumme.

Ist nun die Quersumme (hier $8 + 6 + 7 = 21$) durch 3 teilbar, also ein V_3, so ist die Zahl $= V_3 + V_3 = V_3$ (s. §. 23, 9), folglich durch 3 teilbar.

Anmerkung. Anstatt sämtliche Einheiten zu addieren, kann man kürzer die Vielfachen von 3 ausscheiden. Es sei z. B.

74 835 910 726 421

gegeben. Man scheide $4 + 8$, 3, $5 + 1$, 9, $7 + 2$, 6, $4 + 2$ aus:

7~~4~~ ~~835~~ ~~910~~ ~~726~~ ~~42~~1.

Da $7 + 1 = 8$ übrig bleibt und diese Zahl nicht durch 3 teilbar ist, so ist auch die ganze Zahl nicht durch 3 teilbar.

10. Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Beispiele: 40302 ist durch 9 (und 3) teilbar, weil $4 + 3 + 2 = 9$ durch 9 (und 3) teilbar ist.

4782 ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar, weil die Quersumme $4 + 7 + 8 + 2 = 21$ durch 3, aber nicht durch 9 teilbar ist.

Beweis. Es ist

$$10 = 1 \cdot 9 + 1 = V_9 + 1;$$
$$100 = 11 \cdot 9 + 1 = V_9 + 1;$$
$$1000 = 111 \cdot 9 + 1 = V_9 + 1;$$
$$10000 = 1111 \cdot 9 + 1 = V_9 + 1 \text{ u. s. w.}$$

Die Zahl 4752, d. i. $4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2$, geht damit über in

$$4 \cdot (V_9 + 1) + 7 (V_9 + 1) + 5 (V_9 + 1) + 2$$
$$= 4 \cdot V_9 + 4 + 7 \cdot V_9 + 7 + 5 \cdot V_9 + 5 + 2$$
$$= (4 V_9 + 7 \cdot V_9 + 5 \cdot V_9) + (4 + 7 + 5 + 2).$$

Da der erste Teil stets ein V_9, der zweite Teil aber die Quersumme ist, so wird 4752, überhaupt aber jede Zahl

$$= V_9 + \text{Quersumme}. \qquad \text{(Y)}$$

Ist nun die Quersumme durch 9 teilbar, also ein V_9, so ist die Zahl

$$= V_9 + V_9 = V_9,$$

d. h. sie ist durch 9 teilbar.

1. Zusatz. Die Gleichung Y (siehe viertletzte Zeile) ist also:

Jede Zahl $= V_9 +$ Quersumme der Zahl.

Da nun die Summe um den einen Summand vermindert, den andern Summand geben mufs (s. §. 8, Zus.), so ist:

Jede Zahl — ihre Quersumme $= V_9$; oder:

Jede Zahl um ihre Quersumme vermindert giebt einen Rest, der durch 9 teilbar ist.

Beispiel: 83572 — (Quersumme 25) = 83547. Dieser Rest mufs durch 9 teilbar sein, oder die Quersumme dieses Restes mufs ein Vielfaches von 9 sein (hier $8 + 3 + 5 + 4 + 7 = 27$).

Anmerkung. Wäre eine Ziffer dieses Restes unbekannt, z. B. nur die Ziffern 8, 3, 4, 7 desselben bekannt, so würde man die fehlende Ziffer 5 leicht errechnen können, da von $8 + 3 + 4 + 7 = 22$ bis zum nächsten V_9, d. i. bis 27, noch 5 fehlt.

2. Zusatz. Jede Zahl, um eine andere aus denselben Ziffern bestehende Zahl vermindert, giebt einen Rest, der durch 9 teilbar ist.

Beispiel:

```
  5831
  3185 subtrahiert
=2646 ist durch 9 teilbar.
```

Beweis. 5831 — 3185 ist nach dem vorstehenden Satze:

$$= (V_9 + \text{Quers. der 1. Zahl}) - (V_9 + \text{Quers. der 2. Zahl})$$
$$= V_9 + \text{Quers. der 1. Zahl} - V_9 - \text{Quers. der 2. Zahl}$$
$$= V_9 + \text{Quers. der 1. Zahl} - \text{Quers. der 2. Zahl}.$$

Da nun beide Quersummen stets gleich sein müssen, weil die Zahlen aus denselben Ziffern bestehen, so bleibt nur:

V_9, d. h. die Zahl ist durch 9 teilbar.

Anmerkung. Für die Potenzen von 2 und 5 (für 2, 4, 8, ... 5, 25, 125, ...) hatten die Regeln der Teilbarkeit ein gemeinsames Princip. Man könnte daher ein solches auch für 3, 9, 27, 81, ... vermuten und annehmen, dafs eine Zahl durch 27 teilbar sei, wenn es die Quersumme ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn

$$10 = 0 . 27 + 10 = V_{27} + 10$$
$$100 = 3 \cdot 27 + 19 = V_{27} + 19,$$

oder mit kleineren Zahlen:

$$100 = 4 \cdot 27 - 8 = V_{27} - 8 \text{ u. s. w.}$$

Eine Zahl nun, die aus h Hunderten, z Zehnern und e Einern besteht, d. i. die Zahl $100h + 10z + e$ (s. §. 19, 1) würde damit übergehen in:

$$(V_{27} - 8) \cdot h + (V_{27} + 10) \cdot z + e$$
$$= V_{27} \cdot h - 8h + V_{27} \cdot z + 10z + e$$
$$= V_{27} - 8h + 10z + e.$$

Die Zahl ist mithin nicht $= V_{27} + h + z + e$,

d. i. nicht $= V_{27} +$ Quersumme.

11. Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz aus der Summe der Einheiten der ungeradzahligen Stellen (d. i. der 1., 3., 5., ... Stelle) und der Summe der Einheiten der geradzahligen Stellen (der 2., 4., 6., ... Stelle) durch 11 teilbar (also $= 0, 11, 22, \ldots$) ist.

1. Beispiel:

$$\begin{array}{l} 7\;3\;9\;6\;8\;4 \\ \;\;\text{—}\;\;\text{—}\;\;\text{—} = 4 + 6 + 3 = 13 \\ \text{—}\;\;\text{—}\;\;\text{—}\;\;\; = 8 + 9 + 7 = 24 \end{array} \Big\} \text{ Diff.} = 11.$$

Da diese Differenz durch 11 teilbar ist, so ist die ganze Zahl durch 11 teilbar.

2. Beispiel:

$$\begin{array}{l} 8\;0\;0\;8 \\ \;\;\text{—}\;\;\text{—} = 8 \\ \text{—}\;\;\text{—}\;\;\; = 8 \end{array} \Big\} \text{ Diff.} = 0,$$ folglich ist 8008 durch 11 teilbar.

Beweis.

$$10 = 1 \cdot 11 - 1 = V_{11} - 1$$
$$100 = 9 \cdot 11 + 1 = V_{11} + 1$$
$$1000 = 91 \cdot 11 - 1 = V_{11} - 1$$
$$10000 = 909 \cdot 11 + 1 = V_{11} + 1 \text{ u. s. w.}$$

Nun ist (s. oben das 1. Beisp.):

$$739684 = 7 \cdot 100000 + 3 \cdot 10000 + 9 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 4$$

$$\begin{aligned}
&= 7(V_{11} - 1) + 3(V_{11} + 1) + 9(V_{11} - 1) + 6(V_{11} + 1) \\
&\qquad + 8(V_{11} - 1) + 4 \\
&= 7 \cdot V_{11} - 7 + 3\,V_{11} + 3 + 9\,V_{11} - 9 + 6\,V_{11} + 6 \\
&\qquad + 8\,V_{11} - 8 + 4 \\
&= V_{11} + 4 + 6 + 3 - 8 - 9 - 7 \\
&= V_{11} + (4 + 6 + 3) - (8 + 9 + 7).
\end{aligned}$$

Ist nun die Differenz der beiden Parenthesen, d. i. die Differenz aus der Summe der ungeradzahligen und der Summe der geradzahligen Stellen durch 11 teilbar, also ein V_{11}, so ist die gegebene Zahl $= V_{11} + V_{11} = V_{11}$, also durch 11 teilbar.

Da hier die zweite Parenthese gröfser ist als die erste, so denke man sich:

$$\begin{aligned}
&V_{11} - (8 + 9 + 7) + (4 + 6 + 3) \\
&= V_{11} - [(8 + 9 + 7) - (4 + 6 + 3)] \quad \text{(s. §. 9, 17)} \\
&= V_{11} - V_{11} = V_{11}.
\end{aligned}$$

12. Durch die bisher angegebenen Regeln läfst sich schneller als durch die vollständige Division bestimmen, ob eine gegebene Zahl durch die Potenzen von 2 und 5 (durch 2, 4, 8, ... 5, 25, 125, ...) durch 3, 9 und 11 teilbar sei. Für andere Zahlen sind die vorhandenen Regeln so zusammengesetzt, dafs die vollständige Division gewöhnlich schneller zum Ziele führt.

Für die Teilbarkeit durch 7 läfst sich z. B. folgendes Verfahren aufstellen:

Man bilde von den Einern an Klassen von je 3 Stellen, multipliciere jede erste (niedrigste) Stelle der sämtlichen Klassen mit 1, die zweite Stelle mit 3, die dritte Stelle mit 2, und addiere die Produkte. Ist die Differenz der Summe der ungeradzahligen Klassen (der 1., 3., 5., ... Klasse) und der Summe der geradzahligen Klassen durch 7 teilbar (also = 0, 7, 14, ...), so ist die ganze Zahl durch 7 teilbar.

Beispiel:

	9	4	1	6	3	7	1	9	2	6	5
mult.			2	3	1				2	3	1
mit	3	1				2	3	1			

$$\left.\begin{array}{r} 2 + 18 + 3 + 4 + 18 + 5 = 50 \\ 27 + 4 + 14 + 3 + 9 = 57 \end{array}\right\} \text{Diff.} = 7.$$

Da diese Differenz durch 7 teilbar ist, so ist es auch die gegebene Zahl.

Beweis.

$$\begin{aligned}
10 &= 1 \cdot 7 + 3 = V_7 + 3 \\
100 &= 14 \cdot 7 + 2 = V_7 + 2 \\
1000 : 7 &= 143 \cdot 7 - 1 = V_7 - 1. \quad (1000 = 142 \cdot 7 + 6
\end{aligned}$$

würde die unbequemere Zahl 6 geben.)

$$10000:7 = 1429\cdot 7 - 3,$$
$$100000:7 = 14286\cdot 7 - 2,$$
$$1000000:7 = 142857\cdot 7 + 1 \text{ u. s. w.}$$

Ist nun z. B. 5834269 gegeben, so ist:

$$5\cdot 1000000 + 8\cdot 100000 + 3\cdot 10000 + 4\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 6\cdot 10 + 9$$
$$= 5\cdot(V_7 + 1) + 8\,(V_7 - 2) + 3\,(V_7 - 3) + 4\,(V_7 - 1)$$
$$+ 2\,(V_7 + 2) + 6\,(V_7 + 3) + 9$$
$$= V_7 + 5\cdot\underline{1} - 8\cdot\underline{2} - 3\cdot\underline{3} - 4\cdot\underline{1} + 2\cdot\underline{2} + 6\cdot\underline{3} + 9\cdot\underline{1}\ \ldots (Z)$$

Die hier auf V_7 folgenden Produkte aber entsprechen der oben gegebenen Regel und bilden dieselben ein V_7, so mufs offenbar die Zahl durch 7 teilbar sein.

Anmerkung. Um die gewünschten Reste (hier 1, 3, 2, . . .) stets am einfachsten zu erhalten, dividiere man die Zahl, welche aus 1 mit darauffolgenden Nullen besteht, durch die Zahl, für welche eine Regel der Teilbarkeit gesucht wird.

Beispiel:

```
   Reste   1 3 2 6 4 5 1 3 2
           1 0 0 0 0 0 0 0 0 . . . . . :7
  ----------------------------------------
Quotient:  0 1 4 2 8 5 7 1 4.
```

Die wiederkehrenden Reste sind also 1, 3, 2, 6, 4, 5. Ist aber ein Rest gröfser als die Hälfte des Divisor, so nimmt man statt desselben Subtrahenden, die dadurch entstehen, dafs man den Divisor um jenen Rest vermindert. Hier sind 6, 4, 5 gröfser als $\frac{7}{2}$, daher sind dafür die Subtrahenden $7 - 6 = 1$, $7 - 4 = 3$, $7 - 5 = 2$ zu nehmen (vergl. die abzuziehenden Produkte in Z!)

13. Teilbarkeit durch 13.

```
   Reste   1 10 9 12 3 4 1 10 9
           1 0 0 0 0 0 0 0 0 . . . . . :13
  ----------------------------------------
Quotient:  0 0 7 6 9 2 3 0 7.
```

Die Reste sind hier 1, 10, 9, 12, 3, 4. Für die gröfseren, also unbequemern Zahlen 10, 9, 12 nimmt man die Subtrahenden $13 - 10 = 3$, $13 - 9 = 4$, $13 - 12 = 1$. Wäre nun zu untersuchen, ob 700505 durch 13 teilbar ist, so hätte man in folgender Weise zu verfahren:

```
                         7    0    0    5    0    5
           ------------------------------------------------
  . . . . 3            1   4    3                  1
            1   4   3               1    4    3       Subtrahenden
           ------------------------------------------------
                       28 + 0                 + 5 = 33 )
                                 0 + 20 + 0       = 20 ) Diff. = 13.
```

Da diese Differenz durch 13 teilbar, so ist es die ganze Zahl.

14. Eine einfachere Regel der Teilbarkeit für die Zahlen 7 und 13, die zugleich für 11 gilt, ist die folgende:

Man teile die Zahl von den Einern an in Klassen von je 3 Ziffern. Ist die Differenz aus der Summe der 1., 3., 5. . . . . . Klasse und der Summe der 2., 4., 6. . . . . . Klasse durch 7, 11 oder 13 teilbar, so ist es die ganze Zahl.

1. Beispiel.

$$5\,\overline{150}\,904\,\overline{703}; \qquad \begin{array}{r}703\\150\\\hline 853\end{array} \qquad \begin{array}{r}904\\5\\\hline 909\end{array}$$

$909 - 853 = 56$ ist durch 7 teilbar, folglich ist auch die gegebene Zahl durch 7 teilbar.

2. Beispiel.

$$38\,\overline{201}\,746\,\overline{609}; \qquad \begin{array}{r}609\\201\\\hline 810\end{array} \qquad \begin{array}{r}746\\38\\\hline 784\end{array}$$

$810 - 784 = 26$ ist durch 13 teilbar, folglich auch die gegebene Zahl.

3. Beispiel. $\overline{8}\,219\,\overline{156}$; $\begin{array}{r}156\\8\\\hline 164\end{array}$

$219 - 164 = 55$ ist durch 11 teilbar, folglich auch die gegebene Zahl.

Beweis. $1000 = 1001 - 1$.

Da 1001 ein V_7, aber auch ein V_{13} und ein V_{11}, denn $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, so ist: $1000 = V_{7,\,11,\,13} - 1$.

Eben so
$$\begin{aligned}1000000 &= 999999 + 1\\ &= 999 \cdot 1001 + 1\\ &= V_{7,\,11,\,13} + 1.\end{aligned}$$
$$1000 \text{ Millionen} = V_{7,\,11,\,13} - 1 \text{ u. s. w.}$$

Nun ist z. B. 5150904703 (s. oben):

$$\begin{aligned}&= 5 \text{ Tausendmill.} + 150 \text{ Mill.} + 904 \text{ Taus.} + 703\\ &= 5 \cdot (V_{7,\,11,\,13} - 1) + 150\,(V_{7,\,11,\,13} + 1) + 904\,(V_{7,\,11,\,13} - 1)\\ &\qquad + 703\\ &= V_{7,\,11,\,13} - 5 + 150 - 904 + 703\\ &= V_{7,\,11,\,13} + (150 + 703) - (5 + 904), \text{ oder auch:}\\ &= V_{7,\,11,\,13} - [(5 + 904) - (150 + 703)].\end{aligned}$$

Ist nun die hier in den beiden letzten Zeilen auf $V_{7,\,11,\,13}$ folgende Differenz, d. i. die in der oben ausgesprochenen Regel enthaltene Differenz der Klassen, durch 7, 11 oder 13 teilbar, so ist es auch die gegebene Zahl.

Anmerkung. Für 11 ist selbstverständlich die Regel im 11. Satze vorzuziehen.

Zusatz. Sind die beiden Klassen einer 6stelligen Zahl einander gleich, z. B. 802802, so mufs die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar sein, weil die Differenz der beiden Klassen = 0, 0 aber durch 7, 11 und 13 teilbar.

15. Teilt man die gegebene Zahl von den Einern an in Klassen von gleichviel Ziffern und bildet man die Summe sämtlicher Klassen, so ergeben sich folgende Regeln:

a. Ist die Summe der 2stelligen Klassen durch 99 oder 33 teilbar, so ist es die ganze Zahl.

Beispiel: 7865748;

48
57
86
7
198

ist durch 99 teilbar, folglich auch die gegebene Zahl.

b. Ist die Summe der 3stelligen Klassen durch 27, 37, 111, 333, 999 teilbar, so ist es die ganze Zahl.

c. Ist die Summe der 5stelligen Klassen durch 41, 123, 271, 369, 813, 2439 teilbar, so ist es die ganze Zahl.

16. Teilt man die Zahl in Klassen von gleichviel Stellen und bildet man die Differenz aus der Summe der ungeradzahligen Klassen und der Summe der geradzahligen Klassen, so ergeben sich folgende Regeln.

a. Ist diese Differenz der 2stelligen Klassen durch 101 teilbar, so ist es die ganze Zahl.

Beispiel: $\underline{8}\overline{45}\underline{53}\overline{16}$;

16	53
45	8
61	61

Da 61 — 61 = 0 durch 101 teilbar, so ist es die ganze Zahl,

b. Ist die Differenz der 3stelligen Klassen durch 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001 teilbar, so ist es die ganze Zahl.

Beispiel: $\overline{52}\,\underline{855}\,\overline{985}$;

985
52
1037
855
182

ist durch 91 teilbar, folglich auch die gegebene Zahl.

c. Die Teilbarkeit von 73 und 137 ergiebt sich bei 4stelligen Klassen.

d. Bei 5stelligen Klassen: 9091.
e. „ 6 „ „ 9901.
f. „ 8 „ „ 17.
g. „ 9 „ „ 19.
h. „ 10 „ „ 3541, 27961.

17. Teilbarkeit durch 17.

Man bilde aus den Einern und Zehnern die 1. Klasse, aus den beiden folgenden Stellen die 2. Klasse, aus den übrigen höheren Stellen die 3. Klasse, suche alsdann die Differenz aus der um das Vierfache der 3. Klasse vermehrten 1. Klasse und dem Doppelten der 2. Klasse. Ist diese Differenz durch 17 teilbar, so ist es die ganze Zahl.

Beispiel: $\overline{25}\underline{46}\overline{26}$; 1. Klasse = 26

Das Vierfache der 3. „ = 100

126

Das Doppelte der 2. „ = 92 subtr.

34.

Diese Differenz ist durch 17 teilbar, folglich auch die gegebene Zahl.

Beweis.

$$100 = 6 \cdot 17 - 2 = V_{17} - 2.$$
$$10000 = 588 \cdot 17 + 4 = V_{17} + 4 \text{ u. s. w.}$$

18. Dafs eine gegebene Zahl durch einen bestimmten Divisor nicht teilbar ist, erkennt man oft augenblicklich daran, dafs ein Teil jener Zahl durch diesen Divisor nicht teilbar ist, alle übrigen Teile aber Vielfache dieses Divisor sind.

Beispiel: 1907063 ist nicht durch 7 teilbar, weil 7 und 63 durch 7 teilbar, 19 aber nicht durch 7 teilbar ist.

Beweis. $19 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 63$. Da $19 \cdot 10^5$ nur die Mafse 2, 5 und 19 enthält, so ist vorstehende Summe nach §. 23, 11 nicht durch 7 teilbar.

19. Verwandelt man die gegebene Zahl, deren Divisor gefunden werden soll, in die Zahl eines andern Zahlensystems (siehe §. 21), so läfst sich oft leicht dieser gesuchte Divisor erkennen.

Beispiel. 1487659. Diese Zahl in eine Zahl des Sechsersystems verwandelt = 51515151. Diese Zahl ist durch die hexadische Zahl 51, d. i. durch die dekadische Zahl $5 \cdot 6 + 1 = 31$ teilbar.

20. Einfache Regeln der Teilbarkeit ergeben sich noch für die Produktzahlen, die durch Multiplication von 2, 4, 8, ... 5, 25, 125, ..., 3, 9, 11 entstanden sind, wenn die Faktoren Primzahlen unter sich sind (s. §. 23, 19).

So ist jede Zahl durch 6 ($= 2 \cdot 3$) teilbar, wenn sie durch die relativen Primzahlen 2 und 3 teilbar ist, d. h. wenn die letzte Stelle eine gerade und die Quersumme durch 3 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 72 ($= 8 \cdot 9$) teilbar, wenn sie durch 8 und durch 9 teilbar ist, mithin, wenn die 3 letzten Stellen durch 8 und die Quersumme durch 9 teilbar ist.

Eine Zahl ist durch 55 ($= 5 \cdot 11$) teilbar, wenn die letzte Stelle 0 oder 5 und die Zahl nach dem 11. Satze durch 11 teilbar ist.

1. Zusatz. Um daher zu untersuchen, ob eine Zahl durch 99 teilbar ist, bildet man die Summe der Einheiten der 1., 3., 5., ... Stelle und die Summe der Einheiten der 2., 4., 6., ... Stelle. Ist die Summe beider Summen durch 9, die Differenz beider Summen durch 11 teilbar, so ist die gegebene Zahl durch 99 teilbar. (Einfacher als durch Satz 15, a.)

2. Zusatz. 10, 100, 1000, ... (die Potenzen von 10) zerlegt man nicht in die Faktoren 2 und 5. Vielmehr: Eine Zahl ist durch 10, 100, 1000, ... teilbar, wenn sie sich auf 0, 00, 000, ... endigt.

3. Zusatz. Eine runde Zahl (§. 22, 11), die nicht selbst Potenz von 10 ist, zerlegt man in ein Produkt, von dem der eine Faktor eine Potenz von 10 ist, dividiert alsdann die gegebene Zahl durch diese Potenz, um hierauf zu untersuchen, ob der übrigbleibende Quotient durch die übrigen Faktoren teilbar ist.

Beispiel. Ist die Zahl 416120000 durch 2400 ($= 100 \cdot 8 \cdot 3$) teilbar? Zuerst ist durch 100 zu dividieren $= 416120$. Ist dieser Quotient durch 8 und durch 3 teilbar, so ist auch die gegebene Zahl durch 2400 teilbar.

21. Um zu untersuchen, ob eine gegebene Zahl Primzahl ist oder nicht, untersucht man zunächst nach den Regeln der Teilbarkeit, ob 2, 5, 3 und 11 in derselben enthalten sind. Ist dies nicht der Fall, so dividiert man die Zahl der Reihe nach durch die noch fehlenden Primzahlen 7, 13, 17, 19, 23 u. s. w. Nur Primzahlen sind als Divisoren zu nehmen, denn geht 2 nicht auf, so kann auch 4, 6, 8, ... nicht aufgehen (s. §. 23, 13). Ferner sind nur die Primzahlen als Divisoren zu nehmen, die mit sich selbst multipliciert ein Produkt geben, welches kleiner als die zu untersuchende Zahl ist. Mit anderen Worten: Der höchste Divisor darf nicht gröfser als die Quadratwurzel aus der gegebenen Zahl sein.

Soll z. B. untersucht werden, ob 887 eine Primzahl ist, so findet man zunächst, dafs die Primzahlen 2, 5, 3, 11 nicht enthalten sind (nach §. 24, 1—11). Nun dividiert man 887 der Reihe nach durch 7, 13, 17, 19, 23, 29, nicht aber durch höhere Primzahlen, weil schon $31 \cdot 31 = 961$ gröfser als 887 ist, und da keiner dieser Divisoren aufging, so ist 887 Primzahl.

Noch ist zu zeigen, warum der Divisor nicht gröfser als die Quadratwurzel zu nehmen ist.

$\sqrt{887}$ ist nahe 30; denn $30 \cdot 30 = 900$. Da also annähernd $30 \cdot 30 = 887$, so mufs (annähernd) $887 : 30 = 30$ sein (§. 13, 1, Zus.). Ist aber der Divisor gröfser als 30 (allgemein: gröfser als die Quadratwurzel), so mufs nach §. 23, 1. Zus., der Quotient kleiner als

30 (kleiner als die Quadratwurzel) sein. Sind nun alle Divisoren bis 30 versucht worden und wäre keiner derselben aufgegangen, so kann auch kein Divisor aufgehen, der gröfser als 30 ist. Denn ginge $887:41$ ($41 > 30$) auf, so müfste der Quotient kleiner als 30 sein. Er sei z. B. 17. Dann aber müfste auch umgekehrt $887:17 = 41$ sein (s. §. 13, 4), d. h. es müfste schon einer der Divisoren (17), die kleiner als die Quadratwurzel 30 sind, aufgegangen sein.

§. 25. Zerlegen einer Zahl in Faktoren.

1. Um eine Zahl in Faktoren zu zerlegen, von welchen der eine entweder gegeben oder nach §. 24 gefunden worden ist, hat man die gegebene Zahl durch diesen Faktor zu dividieren; der Quotient ist alsdann der andere Faktor.

Beispiel: 537 gegeben. Nach den Regeln der Teilbarkeit ist der eine Faktor 3, denn die Quersumme ist 15. Folglich ist der andere Faktor $537:3 = 179$. Daher $537 = 3 \cdot 179$.

Beweis. Nach §. 13, 11 ist $537 = 3 . \frac{537}{3}$.

2. Soll eine Zahl in Primfaktoren aufgelöst werden, so zerlegt man dieselbe zunächst in 2 Faktoren und hierauf jeden Faktor wieder, bis sämtliche Faktoren Primzahlen sind.

1. Beispiel: $104 = 4 \cdot 26 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$ oder $2^3 \cdot 13$.

2. Beispiel:

$$850 = 85 \cdot 10 = 5 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17 \text{ oder } = 2 \cdot 5^2 \cdot 17.$$

3. Beispiel:

$$269500 = 2695 \cdot 10 \cdot 10 = 5 \cdot 539 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 5 \cdot 11 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \text{ oder } = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

3. Um sämtliche Zahlen zu bestimmen, durch welche eine gegebene Zahl teilbar ist, zerlege man sie zunächst in ihre Primfaktoren.

Beispiel:

$$360 = 36 \cdot 10 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \text{ oder } = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1.$$

Hierauf bilde man so viele Faktoren, als verschiedene Primzahlen vorhanden sind, wobei jeder Faktor eine Summe von Gliedern ist, von welchen das erste die Zahl 1 und die folgenden Glieder die sämtlichen vorhandenen Potenzen der betreffenden Primzahlen in aufsteigender Ordnung sind. Für 360 also:

$$(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(1 + 3^1 + 3^2)(1 + 5^1)$$
$$\text{oder } (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5).$$

Alsdann multipliciere man jedes Glied des 1. Faktors mit jedem Gliede des 2. Hier also:

$$1 \cdot 1,\ 2 \cdot 1,\ 4 \cdot 1,\ 8 \cdot 1,$$
$$1 \cdot 3,\ 2 \cdot 3,\ 4 \cdot 3,\ 8 \cdot 3,$$
$$1 \cdot 9,\ 2 \cdot 9,\ 4 \cdot 9,\ 8 \cdot 9,$$

oder: 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72.

Jede dieser Zahlen ist hierauf mit jedem Gliede des 3. Faktors zu multiplicieren. Daher:

$1 \cdot 1, 2 \cdot 1, 4 \cdot 1, 8 \cdot 1, 3 \cdot 1, 6 \cdot 1, 12 \cdot 1, 24 \cdot 1, 9 \cdot 1, 18 \cdot 1, 36 \cdot 1, 72 \cdot 1,$
$1 \cdot 5, 2 \cdot 5; 4 \cdot 5, 8 \cdot 5, 3 \cdot 5, 6 \cdot 5, 12 \cdot 5, 24 . 5, 9 \cdot 5, 18 \cdot 5, 36 \cdot 5, 72 \cdot 5.$

Wäre noch ein 4. Faktor vorhanden, so würde jedes Glied desselben mit den so eben gebildeten Zahlen zu multiplicieren sein.

Sind diese Multiplicationen mit dem letzten Faktor ausgeführt, so hat man die gesuchten Zahlen gefunden. Die in 360 aufgehenden Zahlen sind mithin die zuletzt angegebenen Produkte 1, 2, 4, 8, 3, 6, ... oder geordnet:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

2. Beispiel. $29700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^1$.

Folglich:

$$(1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)(1 + 5 + 5^2)(1 + 11),$$

oder: $(1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9 + 27)(1 + 5 + 25)(1 + 11)$.

Der 1. und 2. Faktor führen zu den Produkten:

$1 \cdot 1,\ 2 \cdot 1,\ 4 \cdot 1,\ 1 \cdot 3,\ 2 \cdot 3, 4 \cdot 3, 1 \cdot 9, 2 \cdot 9, 4 \cdot 9, 1 \cdot 27, 2 \cdot 27, 4 \cdot 27,$

oder: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108.

Jede dieser Zahlen ist mit jedem Gliede des 3. Faktors $(1 + 5 + 25)$ zu multiplicieren:

1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108,
5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180, 135, 270, 540,
25, 50, 100, 75, 150, 300, 225, 450, 900, 675, 1350, 2700.

Jede dieser Zahlen ist endlich mit jeder Zahl des 4. Faktors $(1 + 11)$ zu multiplicieren. Man erhält:

1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 27, 54, 108,
5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180, 135, 270, 540,
25, 50, 100, 75, 150, 300, 225, 450, 900, 675, 1350, 2700,
11, 22, 44, 33, 66, 132, 99, 198, 396, 297, 594, 1188,
55, 110, 220, 165, 330, 660, 495, 990, 1980, 1485, 2970, 5940,
275, 550, 1100, 825, 1650, 3300, 2475, 4950, 9900, 7425, 14850,
29700.

Dies sind die sämtlichen Zahlen, welche in 29700 aufgehen.

1. Zusatz. Hat man sämtliche Zahlen bis zur Quadratwurzel der gegebenen Zahl bestimmt, so ergeben sich die übrigen durch die Division der gegebenen Zahl durch jede der schon gefundenen.

Hat man z. B. für 240 die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 gefunden, also die Zahlen, welche kleiner als $\sqrt{240}$ (zwischen 15 und 16) sind, so sind die fehlenden:

$$= \frac{240}{15}, \frac{240}{12}, \frac{240}{10}, \frac{240}{8}, \frac{240}{6}, \frac{240}{5}, \frac{240}{4}, \frac{240}{3}, \frac{240}{2}, \frac{240}{1},$$

oder: $= 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240.$

2. Zusatz. Da in dem Produkte für 360:

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5^1)$$

der 1. Faktor aus $3 + 1 = 4$ Gliedern, der 2. Faktor aus $2 + 1 = 3$ Gliedern besteht, so erhält man durch Multiplication dieser beiden Faktoren 12 Zahlen, weil jedes der 3 Glieder des 2. Faktors mit jedem der 4 Glieder des 1. Faktors multipliciert wird. Multipliciert man diese 12 Zahlen mit jedem der beiden Glieder des 3. Faktors $(1 + 5)$, so ergeben sich 24 Zahlen, welche die sämtlichen in 360 aufgehenden Zahlen vorstellen. Das Produkt:

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5^1) \text{ führt also zu}$$
$$(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ Zahlen.}$$

Ist allgemein die gegebene Zahl $z = a^m b^n c^p d^r \ldots\ldots$, wo a, b, c, $d \ldots\ldots$ die in z enthaltenen Primzahlen, a^m also die in z enthaltene höchste Potenz der niedrigsten Primzahl a, b^n die höchste Potenz der nächstfolgenden Primzahl u. s. w., so würden sich die gesuchten Zahlen in gleicher Weise aus dem Produkte

$$(1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^m)(1 + b + \ldots\ldots + b^n)$$
$$\cdot (1 + c + \ldots\ldots + c^p)(1 + d + \ldots\ldots + d^r) \ldots\ldots$$

ergeben. Da nun diese Faktoren aus

$$m + 1 \qquad n + 1 \qquad p + 1 \qquad r + 1$$

Gliedern bestehen, so mufs die Anzahl aller in der gegebenen Zahl $z = a^m b^n c^p d^r \ldots\ldots$ aufgehenden Zahlen

$$= (m + 1)(n + 1)(p + 1)(r + 1) \text{ sein.}$$

2. Beispiel. Die Anzahl der Zahlen, welche in

$$1336500 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 11^1$$

aufgehen, beträgt:

$$(2 + 1)(5 + 1)(3 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 144.$$

3. Beispiel. Die Anzahl der Zahlen, welche in

$$1925 = 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1$$

aufgehen, beträgt:

$$(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12, \text{ nämlich:}$$

1, 5, 25, 7, 11, 35, 175, 55, 275, 77, 385, 1925.

§. 26. Das Aufsuchen des gröfsten gemeinsamen Mafses.

Das in §. 23, 14—17 gelehrte Verfahren, das gröfste gemeinsame Mafs zu finden, kann durch die Regeln der Teilbarkeit (§. 24) bedeutend vereinfacht werden. Das Bestimmen eines solchen Mafses mag daher nun erst erschöpfend gelehrt werden.

I. Sind in den beiden gegebenen Zahlen gemeinsame Mafse nach den Regeln der Teilbarkeit ersichtlich, so dividiert man die gegebenen Zahlen durch möglichst grofse gemeinsame Mafse. Erkennt man die übrigbleibenden Quotienten als relative Primzahlen, so ist das Produkt der Divisoren das gröfste gemeinsame Mafs.

Es sei z. B. von 768 und 864 das gröfste gemeinsame Mafs zu suchen.

Da man in beiden Zahlen sofort 4 und 3 als Mafse erkennt, so dividiert man durch 12. Die entstehenden Quotienten 64 und 72 lassen dann noch 8 erkennen. Daher:

	:12	:8
768	64	8
864	72	9.

Diese Quotienten 8 und 9 sind relative Primzahlen, folglich ist das Produkt der Divisoren, d. i. $12 \cdot 8 = 96$ das gröfste gemeinsame Mafs.

2. Beispiel. 715 und 1265.

	:5	:11	
715	143	13	relative Primzahlen,
1265	253	23	

folglich $5 \cdot 11 = 55$ das gröfste gemeinsame Mafs.

II. Sind nach den Regeln der Teilbarkeit keine Mafse ersichtlich, so ist die Kettendivision anzuwenden, wobei man die in §. 23, 15—17 gegebenen Vorteile anwendet.

1. Beispiel. 2680001 und 3975793.

```
            3975793 : 2680001 = 1
            2680001
      .....: 1295792 (8 entfernt:)
      .....:  161974 (noch 2 entfernt:)
    2680001 :  80987 = 3
    242961
     250391
     242961
.....: 7430 (10 ausgeschieden:)
```

```
80987 : 743 = 109
743
-----
 6687
 6687
-----
    0
```

Folglich 743 das gröſste gemeinsame Maſs der gegebenen Zahlen.

2. Beispiel: 88147 und 243013.

```
      243013 : 88147 = 3
      264441
      ------
      : 21428 (4 entfernt:)
      :  5357 (11   „    )
  88147 :   487 = 181
  ---------
        0.
```

Folglich 487 das gröſste gemeinsame Maſs.

3. Beispiel. 80851 und 150251.

Hier ist nicht 150251 : 80851 = 2 zu setzen, obgleich 2 näher als 1, weil der Rest nicht leicht zerlegbar.

```
      150251 : 80851 = 1
       80851
      ------
      : 69400 (100 und 2 entfernt:)
  80851 :   347 = 233
  ---------
        0.
```

347 das gröſste gemeinsame Maſs.

Selbstverständlich hat man auch sogleich in den gegebenen Zahlen die Maſse auszuscheiden, welche nicht gemeinsame Maſse sind.

Beispiel: 150447 und 163325.

Die erste Zahl enthält 3 und 11, die zweite 25, welche Zahlen nicht gemeinsame Maſse sind. Diese ausgeschieden, behält man 4559 und 6533. Daher:

```
        6533 : 4559 = 1
        4559
      ------
  . . . . : 1974 (6 entfernt:)
      4559 :  329 = 14
      329
      ----
      1269
      1316
      ----
  329 :   47 = 7
  329
  ---
    0.
```

47 das gesuchte gröſste gemeinsame Maſs.

III. Verbindung beider Verfahren.

1. Beispiel. 172161, 245421.

	:9	:11
172161	19129	1739
245421	27269	2479

2479 : 1739 = 1
1739
. . . . : 740. Dafür
1739 : 37 = 48.
0.

Folglich sind 9, 11 und 37 die gemeinsamen Maſse oder $9 \cdot 11 \cdot 37 = 3663$ ist das gröſste gemeinsame Maſs.

2. Beispiel. 791820, 2202156.

	:4	:9
791820	197955	21995
2202156	550539	61171.

Nun scheide man in 21995 die Zahl 5,
„ 61171 „ „ 11 aus und man behält:

5561 : 4399 = 1
4399
. . . . : 1162. Dafür:
4399 : 581 = 7
4067
. . . : 332. Dafür:
581 : 83 = 7
0.

Die gemeinsamen Maſse sind mithin 4, 9 und 83, das gröſste gemeinsame Maſs daher $= 4 \cdot 9 \cdot 83 = 2988$.

§. 27. Das Aufsuchen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen.

Man präge sich vor allen Dingen die ersten am häufigsten vorkommenden Potenzen der Primzahlen ein.

Primzahlen	Potenzen derselben
2	2, 4, 8, 16, 32, 64, ...
3	3, 9, 27, 81, ...
5	5, 25, 125, ...
7	7, 49, ...
11	
13	

Ist nun das kleinste gemeinsame Vielfache von mehreren gegebenen Zahlen zu suchen, so untersuche man zunächst, welche höchste Potenz der ersten Primzahl 2 in den gegebenen Zahlen vorkommt, ohne diese in Primfaktoren zu zerlegen. Sie ist die gesuchte höchste Potenz, wenn keine der gegebenen Zahlen die nächsthöhere enthält.

Es sei z. B. 15, 24, 66, 40 gegeben.

Hier ist also zunächst die höchste Potenz von 2 aufzusuchen. Man erkennt sofort, dafs 2 selbst vorhanden ist (in 24 oder 66), dafs aber auch die nächsthöhere Potenz von 2, nämlich 4, enthalten ist (in 24 oder 40), dafs endlich auch die nun folgende Potenz 8 enthalten ist (in 24 und 40). Die nächsthöhere Potenz 16 ist in keiner Zahl enthalten. Folglich ist 8 die zu behaltende höchste Potenz von 2. Hierauf ist zu bestimmen, welches die höchste Potenz der nächstfolgenden Primzahl 3 ist. Man erkennt sogleich 3 in 15 oder 24, findet aber, dafs die nächsthöhere Potenz von 3, nämlich 9, in keiner Zahl enthalten ist, folglich ist nur **3** selbst die zu behaltende höchste Potenz von 3.

Es folgt nun die Primzahl 5. Diese ist vorhanden (in 15 und 40), nicht aber die zweite Potenz 25, folglich ist **5** die gesuchte höchste Potenz von 5. Die nächste Primzahl 7 ist nicht vorhanden. Von der nun folgenden Primzahl 11 ist nur **11**, nicht aber die zweite Potenz 121 vorhanden.

Der geübte Rechner sieht sogleich, dafs die übrigen Primzahlen (13, 17, 19, 23, ...) in den gegebenen Zahlen nicht vorkommen.

Hat man so die höchsten Potenzen der vorhandenen Primzahlen bestimmt, so ist ihr Produkt das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache.

Hier ist es also $8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 40 \cdot 33 = 1320$.

Beweis. In $1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ ist

$$15 = 3 \cdot 5,\ 24 = 2^3 \cdot 3,\ 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11,\ 40 = 2^3 \cdot 5$$

enthalten.

2. Beispiel. 16, 28, 21, 36, 63, 56.

Die höchste Potenz von 2 ist 16 (32 in keiner Zahl enthalten),
" " " " 3 " 9 (in 36, 63);
5 fehlt!
" " " " 7 " 7 (in 28, 63, 56).

Höhere Primzahlen (11, 13, ...) sind nicht vorhanden.

Folglich ist $16 \cdot 9 \cdot 7 = 112 \cdot 9 = 1008$ das kleinste gemeinsame Vielfache.

3. Beispiel. 21, 35, 50, 40, 45, 75, 48, 100, 42, 56, 63, 72.

Die höchste Potenz von 2 ist 16 (in 48). Auch der Ungeübte wird erkennen, dafs 8 (in 48 enthalten) nicht die höchste Potenz

von 2 ist, denn der Quotient $48:8=6$ enthält noch immer den Faktor 2. Mithin mufs $8 \cdot 2 = 16$ die gesuchte Potenz sein.

Die höchste Potenz von 3 ist 9 (in 45, 63, 72),
„ „ „ „ 5 „ 25 (in 50, 75, 100),
„ „ „ „ 7 „ 7 (in 21, 35, ...).

Das kleinste gemeinsame Vielfache daher

$$= 16 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7 = 400 \cdot 63 = 25200.$$

4. Beispiel. 72, 45.

Die höchste Potenz von $2 = 8$ (in 72),
„ „ „ „ $3 = 9$ (in beiden Zahlen),
„ „ „ „ $5 = 5$.

Folglich $8 \cdot 9 \cdot 5 = 40 \cdot 9 = 360$ das kleinste gemeinsame Vielfache.

Unbequeme Zahlen zerlegt man nach den Regeln der Teilbarkeit in beliebige Faktoren, die aber relative Primzahlen sein müssen.

5. Beispiel.

	39,	68,	88,	102,	65,	40,	85,	44.
Zerlegt:	$3 \cdot 13$	$4 \cdot 17$	$8 \cdot 11$	$6 \cdot 17$	$5 \cdot 13$		$5 \cdot 17$.	

Daher das kleinste gemeinsame Vielfache

$$= 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 40 \cdot 33 \cdot 221 = 1320 \cdot 221 = 291720.$$

Sollte der ungewöhnliche Fall vorkommen, dafs die höchsten Potenzen nicht sofort entdeckt werden können, so zerlegt man die Zahlen in ihre Primfaktoren.

6. Beispiel. 7600, 1620, 5472, 4750, 6480.

Es ist
$$7600 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 19$$
$$1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$$
$$5472 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 19$$
$$4750 = 2 \cdot 5^3 \cdot 19$$
$$6480 = 2^5 \cdot 3^4.$$

Die höchste Potenz von $2 = 2^5$ u. s. w.; daher das kleinste gemeinsame Vielfache

$$= 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 19 = 32 \cdot 81 \cdot 125 \cdot 19 = 4000 \cdot 1539 = 6156000.$$

Sind die gegebenen Zahlen Primzahlen unter sich, so mufs das Produkt derselben das kleinste gemeinsame Vielfache sein. Von 7, 11, 25 ist es $7 \cdot 11 \; 25 = 1925$.

Anmerkung. Wie das kleinste gemeinsame Vielfache das Produkt der höchsten Potenzen der verschiedenen Primzahlen ist, so ist das gröfste gemeinsame Mafs das Produkt der kleinsten Potenzen der gemeinsamen Mafse.

Beispiel: 360, 378, 630.

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$
$$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$
$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Das gröfste gemeinsame Mafs $= 2 \cdot 3^2$ (denn 2^2 ist kein Mafs von 378, 5 kein Mafs von 378 u. s. w.)

§. 28. Vorteile beim Rechnen mit ganzen Zahlen.

A. Beim Zählen von Dingen.

1. Bei einer fortlaufenden Reihe von Dingen zähle man immer 3 auf einmal. Um z. B. die Punkte

• • • • • • • • • • • • • •

zu zählen, lasse man das Auge nur beim 3., 6., 9., 12. Punkte ruhen. Man zählt daher: 3, 6, 9, 12, **14.**

2. Um die Anzahl sehr vieler Individuen abzuschätzen, zähle man nur einen bestimmten Teil derselben und sehe dann zu, wie oft derselbe im Ganzen enthalten ist. Um z. B. die Anzahl von sehr vielen Personen zu bestimmen, zählt man zunächst 100 ab. Sieht man alsdann, dafs man etwa den 9. Teil der ganzen Menge gezählt hat, so mufs die Zahl sämtlicher Personen annähernd 900 betragen.

B. Merken von Zahlen.

1. Lies 2 (oder 3) Ziffern auf einmal. Beispiel: 14165927. Sprich: 14, 16, 59, 27 oder 141, 659, 27.

2. Man denke sich für:

die Ziffern	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
die Buchstaben	*l*	*d*	*n*	*m*	*r*	*s*	*b*	*f*	*h*	*g*
resp. Buchstaben-	*z*	*t*	*x*	*w*	*qu*	*sch*	*p*	*v*	*ch*	*k*
verbindungen:	*tz*					ß		*pf*	*j*	*ck*
								ver-		
								vor-		

Aus diesen Buchstaben bilde beliebige Wörter, womöglich aber solche, die einen zusammenhängenden Sinn geben. Jedoch haben von jedem Worte nur die 3 ersten Konsonanten (resp. Konsonantenverbindungen der obigen Tabelle) Gültigkeit, nicht aber die nachfolgenden.

Um z. B. die Zahl 3,14159265359 zu behalten, bilde man aus 3 = *m* oder *w*, 1 = *d* oder *t* u. s. w. folgenden Satz:

Wieder diese Knaben so emsig!
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 9

Bei Geschichtszahlen kann man die selbstverständlichen Tausende oder sogar Hunderte weglassen.

Beispiele: Bauernkrieg: *Sense.*
5 25, d. i. 1525.

Göthe: *regierender Minister.* 1749 geboren, 1832 gestorben.
4 9 3 2

C. Allgemeine Regeln für das Rechnen.

1. Man schreibe deutliche Ziffern, nicht zu grofs, um nicht zu viel Raum zu verschwenden oder die Übersichtlichkeit zu beeinträchtigen, aber auch nicht zu klein, weil sonst leicht Verwechselungen entstehen.

2. Rechne nicht laut, sogar nicht leise und lispelnd, weil man sich und andere dadurch stört.

D. Addition.

1. Setze die gleichen Ordnungen (z. B. die Einer) genau senkrecht unter einander.

2.
6
9
2
7
4

Zeige in gleichmäfsigem Takte nach und nach auf 9, 2, 7, 4, dabei die Summen 15, 17, 24, 28 sich denkend. Also nicht $6+9=15$, $15+2=17$ u. s. w.

3.
6
9
6
6
2
6

Bei gleichen Zahlen wende die Multiplication an. Hier also $4 \cdot 6 + 9 + 2 = 24 + 11 = 35$.

4. Suche zunächst die Summanden heraus, welche 10 geben.

Beispiel:
7
8
3
6
2

Denke dir $(7+3)+(8+2)+6=26$.

Dabei ist es nicht nötig, die 10 zuerst herauszusuchen. Denke dir bei nebenstehender Aufgabe:
$$5+8+10+6,$$
mithin der Reihe nach die Zahlen: 13, 23, 29.

5
8
9
6
1

Anmerkung. Beim Rechnen mit Logarithmen u. s. w. kommt häufig die Summe $9+9+2$ vor. Man gewöhne sich, diese Verbindung sogleich als 20 aufzufassen, ohne zu rechnen.

5. Bei einer ungeraden Anzahl von Zahlen, von denen jede folgende immer um dieselbe Zahl gröfser als die vorhergehende ist, multipliciere die mittelste Zahl mit der Anzahl der Zahlen.

Beispiel. $7 + 8 + 9 = 8 \cdot 3$; denn $(7 + 1) + 8 + (9 - 1)$.
Oder: $13 + 17 + 21 + 25 + 29 = 21 \cdot 5$.

6. Ist die Anzahl der Zahlen eine gerade, und folgen sie gleichfalls in gleichen Differenzen aufeinander, so multipliciere die Summe aus der ersten und letzten Zahl mit der halben Anzahl der Zahlen.

1. Beispiel.

$$15 + 16 + 17 + 18 = (15 + 18) \cdot \frac{4}{2} = 33 \cdot 2 = 66;$$

denn: $(15 + 18) + (16 + 17) = 33 \cdot 2$.

2. Beispiel.

$$29 + 32 + 35 + 38 + 41 + 44 = (29 + 44) \cdot \frac{6}{2} = 73 \cdot 3 = 219;$$

denn: $(29 + 44) + (32 + 41) + (35 + 38) = 73 \cdot 3$.

7. Sind die Zahlen nahe gleich, so multipliciere eine Zahl, welche etwa die Mitte der Zahlen vertritt, mit der Anzahl der Zahlen und berichtige das Resultat durch die Differenz aus jeder einzelnen Zahl und der angenommenen mittlern.

Beispiel.

$$67 + 62 + 66 + 69 + 64 = \mathbf{66} \cdot 5 + \overset{(67-66)}{1} - \underset{(66-62)}{4} + 0 + \overset{(69-66)}{3} - \underset{(66-64)}{2}$$
$$= 330 + 1 - 4 + 3 - 2$$
$$= 330 - 2 = 328.$$

8. Erhöhe die eine Zahl zu einer passenden runden Zahl und erniedrige gleichzeitig die andere Zahl um dieselbe Differenz.

Beispiel: $459 + 1798 = 457 + 1800 = 2257$.

9. Eine grofse Anzahl von Summanden, namentlich vielstelliger Zahlen, teile in eine Anzahl bequemer Partialsummen.

Um z. B. 56 siebenstellige Zahlen zu addieren, vereinige nur je 8 aufeinander folgende Zahlen und addiere alsdann die erhaltenen 7 Partialsummen.

10. Beim Kopfrechnen ist es vorteilhaft, mit den höchsten Stellen zu beginnen.

Beispiel. $54 + 77$?
Zunächst $54 + 70 = 124$; dann $124 + 7 = 131$.

11. Als Probe kann man

entweder die Summanden noch einmal in anderer Ordnung addieren, z. B. das erste Mal von oben nach unten, das zweite Mal von unten nach oben;

oder einige der Summanden von der Summe subtrahieren und nachsehen, ob man eine Zahl erhält, die der Summe der übrigen Summanden gleich ist.

Beispiel. 589
764
1353 ist richtig, wenn 1353 — 764 = 589.

E. Subtraktion.

1. Auch hier gilt das unter D, 1 Gesagte.

2. Ist der Subtrahend nur wenig kleiner als eine bequeme runde Zahl, so erhöhe beide Zahlen so, daſs der Subtrahend sich in jene Zahl verwandelt.

Beispiel. 1251 — 897? Jede Zahl um 3 erhöht (s. §. 9, 12) = 1254 — 900 = 354.

3. Zuweilen ist es von Vorteil, die Subtraktion von einer zwischenliegenden runden Zahl auszuführen, um dann das noch Fehlende zu addieren.

Beispiel. A. ist 1789 geboren und 1843 gestorben. Wie alt wurde er? Von 1789 bis 1800: 11 Jahre, hierzu 43 Jahre addiert = 54 Jahre.

4. Bei einer gröſseren Reihe von Nullen im Minuend denkt man sich die Stelle vor den Nullen um 1 kleiner (weil hier eine Einheit geborgt wird), jede der folgenden Nullen in 9 verwandelt und die letzte Null = 10. Alsdann subtrahiert man von links nach rechts.

Beispiel: 600000000
283940756

Denke dir: 2 von 5, 8 von 9, 3 von 9, 9 von 9, 4 von 9, 0 von 9, 7 von 9, 5 von 9, 6 von 10. Daher (von links nach rechts geschrieben) = 316059244.

5. Die dekadische Ergänzung (das arithmetische Komplement) einer Zahl bildet man, indem man sie von der nächsthöhern Potenz von 10 abzieht und in die Stelle, welche die 1 der Potenz von 10 einnahm, das Zeichen △ setzt, welches daselbst — 1 gilt. Um z. B. die dekadische Ergänzung von 568 zu bilden, berechne 1000 — 568 = 432 und setze in die Stelle der Tausende (wegen der 1 in 1000) das Zeichen △. Mithin ist △432 die gesuchte dekadische Ergänzung, die 432 — 1000 vorstellt.

Diese Ableitung führt zu dem einfachen mechanischen Verfahren: Man subtrahiere die Einheiten jeder Stelle von 9, die letzte (Einheiten enthaltende) Stelle von 10 und setze alsdann △ vor die erste Stelle.

Beispiele:

Um die dekadische Ergänzung von 568 zu bilden: 5 von 9 = 4, 6 von 9 = 3, 8 von 10 = 2 und noch △ vorgesetzt = △432.

Die dekadische Ergänzung von 90765? 9 von 9 = 0, 0 von 9 = 9, 7 von 9 = 2, 6 von 9 = 3, 5 von 10 = 5; daher: = △09235.

Die dekadische Ergänzung von 12400? 1 von 9 = 8, 2 von 9 = 7, 4 von 10 = 6, folglich = △87600. Hier gilt 4 als die letzte Stelle, weil die folgenden Stellen (00) keine Einheiten enthalten, wie aus der Subtraktion 100000 — 12400 ersichtlich ist.

Anstatt nun eine Zahl zu subtrahieren, addiert man ihre dekadische Ergänzung.

1. Beispiel: 34567 — 9208?

$$\begin{array}{r} 34567 \\ +\triangle 0792 \\ \hline = 25359 \end{array}$$

Da △ in der betreffenden Stelle — 1 gilt, so hat man hier 3 Zehntausende — 1 Zehntausender = 2 Zehntausender.

Beweis.

$$\begin{aligned} 34567 - 9208 &= 34567 + \underbrace{10000 - 9208}_{} - 10000 \\ &= 34567 + \quad 0792 \qquad - 10000 \\ &= 34567 + 0792, \text{ und vermindert um} \\ &\qquad \text{1 Zehntausender, folglich:} \\ &= 34567 + \triangle 0792. \end{aligned}$$

2. Beispiel.

853 + 27929 — 997 — 16940 + 57 — 9873 = ?

$$\begin{array}{r} 8\ 5\ 3 \\ 2\ 7\ 9\ 2\ 9 \\ \triangle\ 0\ 0\ 3 \\ \triangle\ 8\ 3\ 0\ 6\ 0 \\ 5\ 7 \\ \triangle\ 0\ 1\ 2\ 7 \\ \hline = 1\ 0\ 2\ 9. \end{array}$$

3. Beispiel.

97186 — 65900 — 9992 + 3876 — 39 — 599 = ?

$$\begin{array}{r} 9\ 7\ 1\ 8\ 6 \\ \triangle\ 3\ 4\ 1\ 0\ 0 \\ \triangle\ 0\ 0\ 0\ 8 \\ 3\ 8\ 7\ 6 \\ \triangle\ 6\ 1 \\ \triangle\ 4\ 0\ 1 \\ \hline = 2\ 4\ 5\ 3\ 2. \end{array}$$

Anmerkung. Selbstverständlich wird man Ausdrücke, die nur aus einer additiven und einer subtraktiven Zahl bestehen (s. das 1. Beispiel), nicht erst auf diesem Umwege berechnen.

6. Beim Kopfrechnen beginnt man oft mit Vorteil bei den höchsten Stellen.

Beispiel. 123 — 87?

Zuerst 123 — 80 = 43, alsdann 43 — 7 = 36.

7. Als Probe der Subtraktion addiert man Rest und Subtrahend. Erhält man den Minuend, so ist die Rechnung richtig. Auch kann man den Minuend um den Rest vermindern, wobei man den Subtrahend bekommen müfste.

F. Multiplication.

1. Von grofsem Vorteil ist die Kenntnis des sogenannten „grofsen Einmaleins", welches aus den Produkten

$2 \cdot 11,\ 3 \cdot 11,\ 4 \cdot 11, \ldots\ldots 9 \cdot 11,$
$2 \cdot 12,\ 3 \cdot 12,\ 4 \cdot 12, \ldots\ldots 9 \cdot 12,$ bis
$2 \cdot 19,\ 3 \cdot 19,\ 4 \cdot 19, \ldots\ldots 9 \cdot 19$ besteht.

Von diesen Produkten behalte man vor allen Dingen $7 \cdot 11$, $7 \cdot 13$, $7 \cdot 17$, $7 \cdot 19$, da die übrigen sich entweder leicht ableiten lassen (z. B. $7 \cdot 18 = 7 \cdot 9 \cdot 2 = 63 \cdot 2 = 126$) oder in der Praxis öfter vorkommen und darum sich von selbst einprägen. Aufserdem behalte man auch $11 \cdot 11$, $11 \cdot 13$, $11 \cdot 17$, $11 \cdot 19$, $13 \cdot 13$, $13 \cdot 17$, $13 \cdot 19$, $17 \cdot 17$, $17 \cdot 19$, $19 \cdot 19$ und wohl auch $7 \cdot 23$ und $7 \cdot 29$.

Anmerkung. Mit Rücksicht auf die obige Tafel (2.11 bis 9.19) nennt man die in §. 20, 3, I berührte das „kleine Einmaleins".

2. Man gewöhne sich, ebensowohl nach rechts wie nach links auszurücken, wiewohl das Ausrücken nach rechts (Beginnen mit den höchsten Stellen des Multiplicator) im allgemeinen vorzuziehen ist.

Beispiel.

```
 8294·3572              8294·3572
24882                    16588
 41470                  58058
  58058                41470
   16588              24882
```

3. Man gewöhne sich, das Produkt der einzelnen Stellen nicht erst um das aus dem vorhergehenden Produkt Übriggebliebene zu vermehren, sondern sich bei der Multiplication diese Summe sogleich zu denken.

Beispiel. $5649 \cdot 8 = ?$ $8 \cdot 9 = 72$, alsdann $8 \cdot 4 = 39$ (statt $8 \cdot 4 + 7 = 32 + 7 = 39$) u. s. w.

4. Den Multiplicand benutze selbst als das Produkt aus einer 1 des Multiplicator.

1. Beispiel.

```
 857·132
 2571
  1714
=113124.
```

2. Beispiel.

```
   3749·641
  14996
 22494
=2403109.
```

3. Beispiel.

```
    28374·4136
     85122
     170244
   113496
 =117354864
       ....
       ....
       ....
    4136 fachen (s. Multiplicator!)
```

Das verschiedene Ausrücken kann hier keine Schwierigkeiten machen, denn die in den Partialprodukten hervorgehobenen Ziffern sind die Endziffern des ....; 4136 fachen (s. Multiplicator!)

5. Rechnet man in jedem der gegebenen Faktoren die Nullen und eine 1 weg, so benutzt man denjenigen Faktor als Multiplicator, bei welchem die wenigsten Stellen übrig bleiben.

1. Beispiel. 67·58374?

```
Rechne: 58374·67
        350244
          408618 (=58374 + 350244)
       =3911058.
```

2. Beispiel. 713006·508749?

```
Rechne: 508749·713006
        1526247
           3052494
      3561243
    =362741089494.
```

Bei 508749 als Multiplicator hätte man 2 vielstellige Zahlen mehr schreiben müssen.

6. Gewöhne dich, mit einer kleinern zweistelligen Zahl so zu multiplicieren wie mit einer einstelligen.

Beispiel. 3624·19? Zuerst 19·4 = 76, daher 3624·19. / 6.

Die 7 Zehner zum nächsten Produkt zu addieren.

Hierauf: 19·2 = 45 (nämlich 19.2 + 7). Folglich 3624·19 / 56.

Die 4 (siehe 45) zum nächsten Produkt u. s. w.

Zusatz. Hier mag zugleich eine Erweiterung von §. 20, 3, III Platz finden.

607·38? Multipliciere zunächst 7·38 = 266. Folglich 607·38 / 66.

Die 2 Hunderte sind zu 6·38 Hunderten zu addieren = 230 Hunderte. Mithin: 607·38 / = 23066.

7. Ist der eine Faktor nur wenig kleiner als eine bequeme runde Zahl, so multipliciert man zunächst mit dieser letztern als

Multiplicator und zieht alsdann das Produkt aus der Differenz und dem Multiplicand ab.

1. Beispiel. $29178 \cdot 998$? Man denke sich

$$29178 \cdot (1000 - 2) = 29178 \cdot 1000 - 29178 \cdot 2;$$ daher:

```
 29178000
    58356  (= 29178 · 2) subtr.
= 29119644.
```

2. Beispiel. $5678 \cdot 99? = 5678 \cdot (100 - 1) = 5678 \cdot 100 - 5678;$

```
daher:  567800
          5678  subtr.
      = 562122.
```

3. Beispiel. $49183 \cdot 9997$?

```
 491830000
    147549 = 49183 · 3  subtr.
= 491682451.
```

In ähnlicher Weise $58 \cdot 14 = (60 - 2) \cdot 14 = 840 - 28 = 812$.

8. Das Produkt aus einer Stelle (oder einigen Stellen) des Multiplicator mit dem Multiplicand erhält man oft in einfacherer Weise aus schon gebildeten Produkten.

1. Beispiel.

```
   683794 · 24839
  1367588
   2735176 . . . . . a
    5470352 . . . . . b
     2051382
      6154146 . . . . . c
= 16984759166.
```

Das 4fache (siehe *a*) ist das Doppelte des 2fachen = 2 · 1367588;
„ 8 „ („ *b*) „ „ „ 4 „ = 2 · 2735176
„ 9 „ („ *c*) „ „ 3fache „ 3 „ = 3 · 2051382.

2. Beispiel.

```
   61957 · 2836
  123914
   495656 . . . . . = 4 · 123914
    185871
     371742 . . . . . = 2 · 185871
= 175710052.
```

3. Beispiel.

```
   3849 · 756
  26943
   215544 = 26943 · 8 = 3849 · 56.
= 2909844.
```

Das 56fache mufs selbstverständlich 2 Stellen rechts vom 7fachen; denn 756.

4. Beispiel. $56789 \cdot 78421$

397523
$1192569 = 3 \cdot 397523 = 3 \cdot (7 \cdot 56789)$
$4770276 = 4 \cdot 1192569 = 4 \cdot (21 \cdot 56789).$
$= 4453450169.$

5. Beispiel. $82371465 \cdot 4519135 = ?$

$82371465 \ldots\ldots\ldots\ldots = 8237 \ldots \cdot 1$
$741343185 \ldots\ldots\ldots = 8237 \ldots \cdot 9$
$3706715925 \ldots\ldots\ldots = 7413 \ldots \cdot 5 = 45 \cdot 823 \ldots$
$11120147775 \ldots\ldots = 37067 \ldots \cdot 3 = 135 \cdot 823 \ldots$
$= 372247770482775.$

6. Beispiel. $67459 \cdot 13078$

$876967 = 67459 \cdot 13$
$5261802 = 876967 \cdot 6 = 67459 \cdot 78$
$= 882228802.$ (3 Stellen rechts, weil 078 3 Stellen rechts von 13).

7. Beispiel. $58374 \cdot 96321$

$525366 = 9 \cdot 58374$
$3677562 = 7 \cdot 525366 = 63 \cdot 58374$
$1225854 = 3677562 : 3 = 21 \cdot 58374$
$= 5622642054.$

8. Beispiel. $34978 \cdot 67$

209868
$244846 = \left.\begin{matrix}34978\\209868\end{matrix}\right\}$ add., denn das 7fache $=$ 1faches $+$ 6faches.
$= 2343526.$

9. Beispiel. $45892 \cdot 3737$

$137676 = 3 \cdot 45892$
$321244 = 7 \cdot 45892$
$1698004 = \left.\begin{matrix}137676\\321244\end{matrix}\right\}$ add. $= 37 \cdot 45892$
$= 171498404.$

9. Bei mehr als 2 Faktoren multipliciere zuerst die zwei, deren Produkt sich leicht mit dem 3. Faktor multiplicieren läfst.

Man multipliciere daher zuerst die geraden Zahlen mit denjenigen, welche sich auf 5 endigen.

Beispiele. $8 \cdot 9 \cdot 25 = (8 \cdot 25) \cdot 9 = 200 \cdot 9 = 1800.$
$7 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 11) = 20 \cdot 77 = 1540.$

Zu demselben Zwecke merke man sich vorzüglich folgende Produkte:

$6 \cdot 17 = 102;\quad 3 \cdot 34 = 102;$
$8 \cdot 13 = 104;\quad 4 \cdot 26 = 104;$
$7 \cdot 15 = 105;\quad 3 \cdot 35 = 105;$

$9 \cdot 12 = 108;\quad 4 \cdot 27 = 108;\quad 3 \cdot 36 = 108;$
$3 \cdot 37 = 111;\quad 8 \cdot 14 = 112;\quad 7 \cdot 16 = 112;$
$27 \cdot 37 = 999;\quad 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001.$

Beispiele.

$24 \cdot 17 = (6 \cdot 17) \cdot 4 = 102 \cdot 4 = 408.$
$56 \cdot 13 = (8 \cdot 13) \cdot 7 = 104 \cdot 7 = 728.$
$12 \cdot 18 = (12 \cdot 9) \cdot 2 = 108 \cdot 2 = 216.$
$24 \cdot 52 = 3 \cdot (8 \cdot 13) \cdot 4 = 3 \cdot 104 \cdot 4 = 12 \cdot 104 = 1248.$
$36 \cdot 68 = 6 \cdot (6 \cdot 17) \cdot 4 = 6 \cdot 102 \cdot 4 = 24 \cdot 102 = 2448.$
$81 \cdot 37 = 3 \cdot 27 \cdot 37 = 3 \cdot 999 = 3 \cdot (1000 - 1) = 3000 - 3 = 2997.$
$91 \cdot 88 = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 8 = 1001 \cdot 8 = 8008.$
$37 \cdot 34 = 37 \cdot \frac{102}{3} = \frac{37 \cdot 102}{3} = \frac{3774}{3} = 1258.$

10. Anstatt mit mehreren Zahlen der Reihe nach zu multiplicieren, ist es gewöhnlich vorzuziehen, dies mit ihrem Produkte zu thun.

1. Beispiel. 5896 · 3 · 4 · 5.

Nicht:
```
  5896 (·3
 17688 (·4
 70752 (·5
=353760.
```
sondern
```
 5896 · 60
=353760
```

2. Beispiel. 897 · 4 · 125; dafür einfacher 897 · 500.

3. Beispiel. 268374 · 7 · 11 · 13; dafür einfacher 268374 · 1001.

4. Beispiel. 29838 · 27 · 37 = 29838 · 999.

Daher:
```
 29838000
    29838  subtr.
=29808162.
```

11. Das Zerlegen des Multiplicators ist nicht immer vorteilhaft, wiewohl man dabei öfter an Ziffern spart.

Beispiel.
```
   95453 · 45
  859077 (·9
=4295385 (·5.
```

Die berechneten Produkte enthalten zwar nur 13 Ziffern, während bei
```
  95453 · 45
 381812
  477265
=4295385
```
18 Ziffern geschrieben werden, jedoch ist die Multiplication ohne Zerlegen in der Regel eine einfachere und daher sicherere.

Die Berechnung der Zahl 477265 entweder nach dem 8. Satz, 8. Beisp., oder nach dem 12. Satze.

Ebenso ist 9538·48 ohne Zerlegen einfacher, weil 8 das Doppelte von 4.

Noch weniger vorteilhaft ist es, den um 1 erhöhten oder erniedrigten Multiplicator in Faktoren zu zerfällen.

Beispiel. 65874·37 als 65874·(6·6 + 1) aufgefafst:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{65874\,(\cdot 6} \\ \underline{395244\ \cdot 6} \end{array}\right\}36$$

$$\begin{array}{rl} 2371464 & \\ 65874 & \text{addiert} = +\,1\text{mal} \\ \hline = 2447338. & \end{array}$$

Einfacher ist wohl die direkte Multiplication mit 37.

2. Beispiel. 563992·47 = 563992·(6·8 — 1).

$$\left.\begin{array}{r} \underline{563992\cdot 6} \\ \underline{3383952\cdot 8} \end{array}\right\}48$$

$$\begin{array}{rl} 27071616 & \\ 563992 & \text{subtr.} = -\,1\text{mal} \\ \hline = 26507624. & \end{array}$$

Auch hier kommt man mit der direkten Multiplication eher zum Ziele.

12. Anstatt mit 5 zu multiplicieren, nimmt man die Hälfte vom 10fachen. Denn $a \cdot 5 = a \cdot \frac{10}{2} = \frac{a \cdot 10}{2}$.

1. Beispiel. 59267·5? Man denke sich: $\frac{592670:2}{296335.}$

2. Beispiel.

$$\begin{array}{r} \underline{78394\cdot 57} \\ 391970 \\ 548758 \\ \hline = 4468458. \end{array}$$

(Gedacht 783940 : 2; man stellt daher 3 unter 7!)

3. Beispiel.

$$\begin{array}{rl} 76394\cdot 4165 & \\ 305576 \ldots\ldots & = 4\cdot 76394 \\ 458364 \ldots\ldots & = 6\cdot 76394 \\ 381970 \ldots & = 763940:2! \\ \hline = 318181010. & \end{array}$$

Um hierbei das 5fache u. s. w. immer richtig unter einander zu stellen, denke man sich 30 als das 4fache von 7 (der Zahl 76394), 45 als das 6fache dieser 7, 38 als das 5fache dieser 7.

4. Beispiel.

$$236\cdot 35 = 236\cdot 5\cdot 7 = \frac{2360}{2}\cdot 7 = 1180\cdot 7 \text{ u. s. w.}$$

5. Beispiel. $45\cdot 27 = 9\cdot 27\cdot 5 = \frac{2430}{2}$.

6. Beispiel. $45 \cdot 85 = \frac{90}{2} \cdot \frac{170}{2} = \frac{15300}{4} = 3825.$

13. Anstatt mit 25 zu multiplicieren, nimmt man den vierten Teil des 100fachen. Denn $a \cdot 25 = a \cdot \frac{100}{4} = \frac{a \cdot 100}{4}$.

1. Beispiel. 7326 · 25? Man denke sich $\underline{732600:4}$
$= 183150.$

2. Beispiel.

$$\begin{array}{ll} \underline{91347 \cdot 925} & \\ 2283675 & = 9134700:4 \\ 822123 & = 91347 \cdot 9 \\ \hline = 84495975. & \end{array}$$

3. Beispiel. 225 · 7? Statt der direkten Multiplication könnte man auch $25 \cdot 9 \cdot 7 = 63 \cdot 25 = 6300:4 = 1575$ rechnen.

14. Anstatt mit 125 zu multiplicieren, multipliciert man mit 1000 und dividiert durch 8.

Beispiel. $98736 \cdot 125 = \underline{89736000:8}$
$= 11217000.$

15. Multiplication mit 625.
Multipliciere mit 10000 und dividiere durch 16.

16. Multiplication mit 15.
Addiere zum 10fachen die Hälfte desselben; denn

$$10 + \frac{10}{2} = 15.$$

Beispiel. 6734 · 15?

$$\begin{array}{r} 6734_0:2 \\ 33670 \\ \hline = 101010. \end{array}$$

17. Mit Zahlen, die sich auf 5 endigen, aber nicht durch 25 teilbar sind, multipliciert man, indem man mit der doppelten Zahl multipliciert und dann durch 2 dividiert.

Beispiel. $43 \cdot 35 = 43 \cdot 70:2 = 3010:2 = 1505.$

Ist der Multiplicand eine gerade Zahl, so dividiert man zuerst.

Beispiel. $18 \cdot 35 = \frac{18}{2} \cdot 70 = 9 \cdot 70 = 630.$ (S. §. 13, 11. Zus.)

18. Mit Zahlen, die sich auf 25 oder 75 endigen, aber nicht durch 125 teilbar sind, multipliciert man, indem man mit dem 4fachen der Zahl multipliciert und durch 4 dividiert.

1. Beispiel. $9463 \cdot 425 = (9463 \cdot 1700):4 = 16087100:4.$

2. Beispiel. 48 · 75? Dividiere zuerst durch 4, also:

$= 48 \cdot \frac{300}{4} = 12 \cdot 300 = 3600.$ (S. auch §. 13, 11. Zus.)

19. Mit Zahlen, die sich auf 125, 375, 625, 875 endigen, multipliciert man, indem man mit dem 8fachen multipliciert und durch 8 dividiert.

1. Beispiel. $467 \cdot 375 = (467 \cdot 3000) : 8 = 1401000 : 8.$

2. Beispiel. $296 \cdot 625$? Dividiere zuerst durch 8, also:

$$= 296 \cdot \frac{5000}{8} = \frac{296}{8} \cdot 5000 = 37 \cdot 5000.$$

20. Multiplication mit 75.

Entweder: Multipliciere mit 100 und subtrahiere vom Produkt den vierten Teil desselben; denn $75 = 100 - \frac{100}{4}$.

Beispiel. $719563 \cdot 75$?

$$\begin{array}{r} 71956300 : 4 \\ 17989075 \text{ subtr.} \\ \hline = 53967225. \end{array}$$

Oder: Multipliciere mit 300 und dividiere durch 4. (Siehe 18. Satz!)

21. Multiplication mit 875.

Multipliciere mit 1000 und ziehe vom Produkt den achten Teil desselben ab; denn: $875 = 1000 - \frac{1000}{8}$.

Oder: Multipliciere mit 7000 und dividiere durch 8.

22. Mit 11 multipliciert man, indem man vor die erste und hinter die letzte Stelle des Multiplicand 0 setzt und dann von rechts nach links je 2 neben einander stehende Stellen addiert, die jedesmaligen Zehner aber mit der folgenden Summe vereinigt.

Beispiel. $53827626 \cdot 11$?

$$\begin{array}{c} 0\ 5\ 3\ 8\ 2\ 7\ 6\ 2\ 6\ 0 \\ \hline 5\ 9\ 2\ 1\ 0\ 3\ 8\ 8\ 6. \end{array}$$

Zuerst $0 + 6 = 6$; dann $6 + 2 = 8$; dann $2 + 6 = 8$; dann $6 + 7 = 13$, wobei die 1 zur nächsten Summe zu zählen u. s. w.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{r} 53827626 \\ 53827626 \end{array}\right\} \text{addiert!}$$

Anmerkung. Eine ähnliche Abkürzung erhält man für die Multiplication mit 12, 13, 14 bis 19, die sich gleichfalls leicht aus der vollständigen Multiplication ergiebt.

Beispiel. $5487 \cdot 13$?

Für die Einer: $3 \cdot 7 = 21$ (die 2 zur folgenden Stelle),
„ „ Zehner: $3 \cdot 8 + 7$ und jene $2 = 33$ (die 3 links zur folgenden Stelle),
„ „ Hunderte: $3 \cdot 4 + 8$ und jene $3 = 23$ (die 2 zur folgenden Stelle) u. s. w.

23. Mit 111 multipliciert man, indem man 00 vor und nachsetzt und von rechts nach links je 3 Stellen addiert.

Beispiel. 4567689 · 111?

Ausführung: 0 0 4 5 6 7 6 8 9 0 0

5 0 7 0 1 3 4 7 9.

Zuerst $0 + 0 + 9 = 9$.

Dann $0 + 9 + 8 = 17$; 1 zur nächsten Summe;

„ $9 + 8 + 6 +$ jene $1 = 24$; 2 zur nächsten Summe u. s. w.

Beweis.

4567689
 4567689
  4567689 } addiert!

24. Um mit 9 zu multiplicieren, kann man 0 vor und nach setzen, dann von den Zehnern an jede Stelle von der folgenden rechts subtrahieren. Ist die abzuziehende Stelle gröfser, so nimmt man 1 Zehner zum Minuend, dafür bei der nächsten Subtraktion den Minuend um 1 kleiner.

Beispiel. 47398625 · 9?

Man denke sich: 0 4 7 3 9 8 6 2 5 0

4 2 6 5 8 7 6 2 5.

Zuerst 5 von 0; da die Subtraktion unmöglich, so borgt man 1, folglich 5 von $10 = 5$.

Dann 2 „ 4 (statt 5, weil vorher 1 geborgt) $= 2$;

„ 6 „ 2, dafür (1 geborgt) 6 von $12 = 6$;

„ 8 „ 5 (statt 6, weil vorher 1 geborgt); dafür 8 von $15 = 7$;

„ 9 „ 7 (statt 8, weil vorher 1 geborgt); dafür 9 von $17 = 8$;

„ 3 „ 8 (statt 9, weil vorher 1 geborgt) $= 5$;

„ 7 „ $13 = 6$;

„ 4 „ $6 = 2$;

Endlich 0 „ $4 = 4$.

Beweis. $47398625 \cdot (10 - 1) = 473986250$
47398625 } subtr.

25. Sind zu Produkten noch andere Zahlen zu addieren, so addiert man nicht die Partialprodukte jedes einzelnen Produkts für sich, sondern sofort zu den Partialprodukten die übrigen Zahlen.

1. Beispiel. $87 \cdot 23 + 49$?

87 · 23
174
 261
  49
$= 2050$.

2. Beispiel. $49 \cdot 82 + 76 \cdot 39$?

$$\left.\begin{array}{l} 49 \cdot 2 = \quad 98 \\ 49 \cdot 8 = \quad 392 \end{array}\right\} 49 \cdot 82!$$
$$\left.\begin{array}{l} 76 \cdot 3 = \quad 228 \\ 76 \cdot 9 = \quad 684 \end{array}\right\} 76 \cdot 39!$$
$$= 6982.$$

26. Sind nahe gleiche Zahlen vorhanden oder mehrere Stellen der Zahlen einander gleich, so läſst sich oft eine Vereinfachung erzielen, wie folgende Beispiele lehren.

1. Beispiel.

$$\begin{aligned} 629 \cdot 7 - 628 &= 629 \cdot 7 - (629 - 1) \\ &= 629 \cdot 7 - 629 + 1 \\ &= 629 \cdot (7 - 1) + 1 = 629 \cdot 6 + 1 \\ &= 3774 + 1 = 3775. \end{aligned}$$

2. Beispiel.

$$\begin{aligned} 19 \cdot 37 + 237 &= 19 \cdot 37 + 37 + 200 = 20 \cdot 37 + 200 \\ &= 740 + 200 = 940. \end{aligned}$$

27. Ist jeder Faktor einer bestimmten runden Zahl nahe gleich, so stellt man jeden derselben als Summe oder Differenz dar, deren erste Zahl jene runde Zahl ist.

1. Beispiel.

$$\begin{aligned} 53 \cdot 48 &= (50 + 3)(50 - 2) = 50 \cdot 50 + 3 \cdot 50 - 2 \cdot 50 - 3 \cdot 2 \\ &= 2500 + (3 - 2) \cdot 50 - 6 \\ &= 2500 + 50 - 6 = 2544. \end{aligned}$$

2. Beispiel.

$$\begin{aligned} 122 \cdot 116 &= (120 + 2)(120 - 4) \\ &= 120 \cdot 120 - 4 \cdot 120 + 2 \cdot 120 - 2 \cdot 4 \\ &= 14400 - 2 \cdot 120 - 8 = 14400 - 240 - 8 \\ &= 14400 - 248 = 14152. \end{aligned}$$

3. Beispiel.

$$\begin{aligned} 997 \cdot 996 &= (1000 - 3)(1000 - 4) \\ &= 1000000 - 3 \cdot 1000 - 4 \cdot 1000 + 3 \cdot 4 \quad \text{(s. §. 11, 9)} \\ &= 1000012 - 7 \cdot 1000 \\ &= 993012. \end{aligned}$$

4. Beispiel.

$$\begin{aligned} 9998 \cdot 9993 &= (10000 - 2)(10000 - 7) \\ &= 100000000 - 2 \cdot 10000 - 7 \cdot 10000 + 14 \\ &= 100000014 - 9 \cdot 10000. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Beispielen läſst sich leicht folgende Regel ableiten:

$$(10^n - a)(10^n - b) = 10^n \cdot 10^n + ab - (a + b) \cdot 10^n.$$

28. Hat man $857 \cdot 964 = 826148$ berechnet und will man dann $856 \cdot 966$ wissen, so denke man sich dieses letztere Produkt

$$= (857 - 1)(964 + 2)$$
$$= 857 \cdot 964 - 964 + 2 \cdot 857 - 2$$
$$= 826148 - 964 + 1714 - 2$$
$$= 826148 + 748 = 826896.$$

29. Ist der eine Faktor eben so viel über einer einfachen runden Zahl als der andere unter derselben, so erhält man das Produkt, wenn man das Quadrat der runden Zahl vermindert um das Quadrat aus der Differenz der runden Zahl und einem der gegebenen Faktoren.

1. Beispiel.

$$63 \cdot 57 = (60 + 3) \cdot (60 - 3) = 60^2 - 3^2 = 3600 - 9 = 3591.$$

Beweis.

$$(60 + 3)(60 - 3) = 60 \cdot 60 + 3 \cdot 60 - 60 \cdot 3 - 3 \cdot 3$$
$$= 60^2 \qquad\qquad - 3^2,$$

denn die beiden Mittelglieder müssen sich stets heben.

2. Beispiel.

$$48 \cdot 52 = (50 - 2)(50 + 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496.$$

3. Beispiel.

$$29 \cdot 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899.$$

4. Beispiel.

$$126 \cdot 114 = (120 + 6)(120 - 6) = 120^2 - 6^2 = 14400 - 36 = 14364.$$

5. Beispiel.

$$1293 \cdot 1307 = (1300 - 7)(1300 + 7) = 1300^2 - 7^2 = 1690000 - 49$$
$$= 1689951.$$

Man kann dies auch auf folgende Beispiele anwenden:

$$58 \cdot 63 = 58 \cdot (62 + 1) = 58 \cdot 62 + 58 = (60 - 2)(60 + 2) + 58$$
$$= 3600 - 4 + 58 = 3600 + 54 = 3654.$$

$$97 \cdot 86 = (94 + 3) \cdot 86 = 94 \cdot 86 + 3 \cdot 86 = 8100 - 16 + 258$$
$$= 8100 + 242 = 8342.$$

30. Um 2 vielstellige Zahlen ohne Partialprodukte zu multiplicieren, denke man sich dieselben zunächst von gleichviel Stellen, indem man die fehlenden Ordnungen mit 0 ausfüllt und setze die Faktoren alsdann untereinander.

Beispiel. $5873 \cdot 614$? Man denke sich 5873
0614.

Die Zahlen mögen mit Weglassung der mittleren Stellen folgende sein:

$$A\,B \ldots\ldots L\,M\,N\,P$$
$$a\,b \ldots\ldots l\,m\,n\,p,$$

wo A, B ..... a, b ..... die Ziffern der beiden Zahlen bedeuten.

Man multipliciert nun zuerst die beiden letzten Stellen P und p, schreibt jedoch nur die letzte Stelle dieses Produkts (die Einer)

für die gesuchte Zahl, um den übrigen Teil (die etwaigen Zehner) den folgenden Produkten hinzuzufügen.

Hierauf addiere die Produkte $Np + Pn$, wobei wieder nur die letzte Stelle für die gesuchte Zahl geschrieben und der übrige Teil für die nächsten Produkte behalten wird.

Alsdann ist $Mp + Nn + Pm$,
hierauf $Lp + Mn + Nm + Pl$ u. s. w.
zu bilden, indem man in beiden Zahlen immer 1 Stelle weiter nach links fortschreitet und von den zu benutzenden Stellen stets

die 1. Stelle oben (L in der letzten Summe) mit der letzten unten (p),
„ 2. „ „ (M) mit der vorletzten unten (n),
„ 3. „ „ (N) „ „ drittletzten „ (m) u. s. w.

multipliciert, die Produkte nebst der aus der vorher bestimmten Stelle zurückbehaltenen Zahl addiert.

Ist man bei der höchsten Stelle der Zahlen (der 1. Stelle links) angelangt, so schneidet man die beiden letzten Stellen der Zahl (P und p) ab und bildet mit den sämtlichen übrigbleibenden Stellen dieselbe Summe der Produkte, also:

$$An + Bm + \ldots\ldots Mb + Na.$$

Alsdann schneidet man von den so eben benutzten Stellen wieder die 2 letzten Stellen (N und n) ab u. s. w., bis man zu $A \cdot a$ gekommen ist.

Es sei z. B. 4385 mit
9627 zu multiplicieren.

Für die letzte Stelle (Einer) der gesuchten Zahl: $\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$, folglich $5 \cdot 7 = 35$. Schreibe die 5 Einer für die gesuchte Zahl:

$$\begin{array}{r} 4385 \\ 9627 \\ \hline 5 \end{array}$$

und behalte die 3 Zehner für die nächste Stelle.

Hierauf: $\begin{pmatrix}85\\27\end{pmatrix}$, folglich $8 \cdot 7 + 5 \cdot 2$, wobei das 1. Produkt sogleich um jene zurückbehaltene 3 zu vermehren ist, daher
$59 + 10 = 69$. Schreibe 9, folglich:

$$\begin{array}{r} 4385 \\ 9627 \\ \hline 95 \end{array}$$

und behalte die 6 (Zehner) von 69 für die nächste Stelle.

Alsdann: $\begin{pmatrix}385\\627\end{pmatrix}$, folglich $3 \cdot 7 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 6$, wobei das 1. Produkt wegen der herüberzunehmenden 6 nicht $3 \cdot 7 = 21$, sondern $3 \cdot 7 = 27$ ausgesprochen wird. Daher $27 + 16 + 30 = 73$.

Oder: 4385
9627
———
395;

die 7 der Zahl 73 für die nächste Stelle.

Nun folgt: $\begin{pmatrix}4385\\9627\end{pmatrix}$, folglich $4 \cdot 7 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 6 + 5 \cdot 9 = 35$ (wegen jener 7) $+ 6 + 48 + 45 = 134$; daher:

4385
9627
———
4395;

die 13 der Zahl 134 für die nächste Stelle.

Jetzt sind die Einer beider Zahlen zu streichen. Aus $\begin{pmatrix}438\\962\end{pmatrix}$ mithin: $4 \cdot 2$ (vermehrt um jene 13) $+ 3 \cdot 6 + 8 \cdot 9 = 21 + 18 + 72 = 111$; daher:

4385
9627
———
14395;

die 11 Zehner der Zahl 111 für die nächste Stelle.

Nun auch die Zehner der beiden Zahlen gestrichen. Aus $\begin{pmatrix}43\\96\end{pmatrix}$ folgt $4 \cdot 6\,(+11!) + 3 \cdot 9 = 35 + 27 = 62$; daher:

4385
9627
———
214395; 6 für die nächste Stelle.

Zuletzt: $\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$, folglich $4 \cdot 9\,(+6!) = 42$. Mithin:

4385
9627
———
42214395.

Beweis.

Zuerst: 5 Einer × 7 Einer = 35 Einer = 3 Zehner + 5 Einer.

Alsdann: 8 Zehner · 7 + 2 Zehner · 5 + jene 3 Zehner = 69 Zehner = 6 Hunderte + 9 Zehner.

Alsdann: 3 Hunderte · 7 + 8 Zehner · 2 Zehner + 6 Hunderte · 5 + jene 6 Hunderte = 21 Hunderte + 16 Hunderte + 30 Hunderte + 6 Hunderte = 73 Hunderte u. s. w.

2. Beispiel. 4736
5802
———
= 27478272.

Erklärung:

1) $6 \cdot 2 = 12$; 2 geschrieben, 1 behalten.
2) $3 \cdot 2\,(+1) + 6 \cdot 0 = 7 + 0 = 7$.
3) $7 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 8 = 14 + 48 = 62$.
4) $4 \cdot 2\,(+6) + 7 \cdot 0 + 3 \cdot 8 + 6 \cdot 5 = 14 + 0 + 24 + 30 = 68$.
5) $4 \cdot 0\,(+6) + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 = 6 + 56 + 15 = 77$.
6) $4 \cdot 8\,(+7) + 7 \cdot 5 = 39 + 35 = 74$.
7) $4 \cdot 5\,(+7) = 27$.

3. Beispiel. 83067 / 1954. Man denke sich 83067 / 01954 $= 162312918$.

Erklärung:

1) $7 \cdot 4 = 28$.
2) $6 \cdot 4 (+2) + 7 \cdot 5 = 26 + 35 = 61$.
3) $0 \cdot 4 (+6) + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 9 = 6 + 30 + 63 = 99$.
4) $3 \cdot 4 (+9) + 0 \cdot 5 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 1 = 21 + 0 + 54 + 7 = 82$.
5) $8 \cdot 4 (+8) + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 9 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0 = 40 + 15 + 6 = 61$.
6) Nachdem 7 und 4 gestrichen:
   $8 \cdot 5 (+6) + 3 \cdot 9 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 46 + 27 = 73$.
7) Nachdem 6 und 5 gestrichen:
   $8 \cdot 9 (+7) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 79 + 3 = 82$.
8) Nachdem 0 und 9 gestrichen: $8 \cdot 1 (+8) + 3 \cdot 0 = 16$.
9) Nachdem 3 und 1 gestrichen: $8 \cdot 0 (+1) = 1$.

31. Beim Kopfrechnen fängt man oft mit Vorteil bei den höchsten Stellen an.

Beispiel. $873 \cdot 6 = ?$ $800 \cdot 6 = 4800$, vermehrt um $70 \cdot 6 = 420$, folglich 5220, vermehrt um $3 \cdot 6 = 18$, folglich 5238.

32. Als Probe kann man das Produkt durch den einen Faktor dividieren, wobei der andere Faktor als Quotient erscheinen mufs (§. 13, 5).

Haben die Faktoren nahe gleichviel Stellen, so kann man die Rechnung noch einmal mit dem soeben benutzten Multiplicand als Multiplicator ausführen.

Beispiel.	$378 \cdot 456$	Probe:	$456 \cdot 378$
	1512		1368
	1890		3192
	2268		3648
	$= 172368.$		$= 172368.$

Oder man führt die Rechnung nur mit den einflufsreichsten Stellen aus und sieht, ob das erhaltene Resultat übereinstimmt. Beim letzten Beispiel im 30. Satz: 8 Zehntausende $\times$ 2 Tausende $= 16$ Zehnermillionen $= 160000000$, folglich richtig. Diese Probe ist bei jeder Rechnung (nicht blofs der Multiplication) oft allen andern Proben vorzuziehen.

Hier ist ferner auf die Neuner- und Elferprobe (§. 29 und 30) hinzuweisen.

G. Division.

1. Die Kenntnis des grofsen Einmaleins ist auch hier von Vorteil.

1. Beispiel. $3\ 1\ ^{15}4\ ^{10}1\ ^{5}5\ ^{7}9\ ^{15}2\ ^{8}6\ ^{6}5 : 16 = 1\ 9\ 6\ 3\ 4\ 9\ 5\ 4\tfrac{1}{16}$.

2. Beispiel. $5604 : 4$? Nicht $5 : 4$ u. s. w., sondern $56 : 4 = 14$.

3. Beispiel. 671310 : 6? Zuerst 6 : 6, dann sogleich 71 : 6 = 11 u. s. w.

2. Als Vorteil wird oft angegeben, nur die Reste, nicht die Partialprodukte zu schreiben.

Beispiel. $2611391 : 487 = 5362\frac{97}{487}$.

```
2611391
 1763
  3029
   1071
     97.
```

Es ist aber Thatsache, dafs sich hierbei der geübteste Rechner sehr leicht irrt und daher die Rechnung stets mehrmals durchsehen müfste, um sicher zu sein, ob das Resultat auch wirklich richtig ist. Da dies beim Niederschreiben der Partialprodukte nicht der Fall ist, so gewinnt man bedeutend an Zeit und hat nicht mit der anstrengenden Aufmerksamkeit zu rechnen, die jene Abkürzung erfordert. Bei sehr bequemen Divisoren können die Partialprodukte allerdings weggelassen werden.

Beispiel. $314159265 : 1003 = 313219\frac{608}{1003}$.

```
314159265
 1325
  3229
   2202
    1966
     9635.
```

3. Bei sehr vielstelligen Divisoren bildet man sich zuvor die Produkte aus dem Divisor und den Zahlen 2 bis 9.

Beispiel. 51968374210735 : 89314276?
Bilde zunächst: $2 \cdot 89314276 = 178628552$ } addiert giebt das 3fache.
$3 \cdot 89314276 = 267942828$.

Das 4fache = 2mal das 2fache, das 5fache = der Hälfte des 10fachen,
„ 6 „ = „ „ 3 „ „ 7fache = 3fache + 4fache,
„ 8 „ = „ „ 4 „ „ 9 „ = 4 „ + 5 „ .

Diese Produkte sind sehr leicht gebildet und man sieht auch augenblicklich, welches das stets abzuziehende Partialprodukt ist.

4. Um durch 10, 100, 1000, ... (durch die Potenzen von 10) zu dividieren, schneidet man zuletzt 0, 00, 000, ... ab, oder, wenn die Zahl sich nicht auf Null endigt, betrachtet man resp. die letzte Stelle als 10tel, die 2 letzten Stellen als Hundertel u. s. w.

Beispiele. $56179000 : 100 = 561790$; $28314 : 10 = 2831\frac{4}{10}$; $967019 : 1000 = 967\frac{19}{1000}$.

5. Um durch eine runde (auf Nullen sich endigende) Zahl zu dividieren, die nicht Potenz von 10 ist, schneidet man im

Divisor die Nullen und vom Dividend zuletzt eine gleiche Anzahl Stellen ab. An den bei der Division dieser verkürzten Zahlen zuletzt erhaltenen Rest hängt man die weggelassenen Stellen des Dividend an und dividiert die erhaltene Zahl durch den unverkürzten Divisor.

1. Beispiel. 160591871 : 473000?

$$160591871 : 473000 = 339\tfrac{244871}{473000}.$$

```
160591871 : 473000
1419
 1869
 1419
  4501
  4257
  244871 : 473000.
```

Der Beweis ergiebt sich aus der unverkürzten Division:

```
160591871 : 473000
1419000
 1869187
 1419000
  4501871
  4257000
   244871 : 473000!
```

2. Beispiel. 24801659 : 1200?

$$24801659 : 1200 = 20668\tfrac{59}{1200}.$$

3. Beispiel. 751946 Minuten, wie viel Stunden?

$$751946 : 60 = 12532 \text{ Stunden } 26 \text{ Min.}$$

6. Hat man eine Zahl mit einer zweiten zu multiplicieren und das Produkt durch eine dritte Zahl zu dividieren, so dividiert man zuerst, wenn die Division aufgeht oder die Multiplication hierdurch bequemer wird.

1. Beispiel. $\frac{78 \cdot 59}{13} = (78 : 13) \cdot 59 = 6 \cdot 59.$

2. Beispiel. $67625 \cdot 41 : 125 = (67625 : 125) \cdot 41 = 541 \cdot 41.$

7. Derselbe Satz allgemeiner:

Man kürze vor der Multiplication und Division jede multiplicierende Zahl mit jeder dividierenden.

Beispiel. $\frac{84 \cdot 17}{56}$? 84 mit 56 durch 4 und dann noch durch 7, also durch 28 gekürzt:

$$\frac{\overset{3}{\cancel{84}}\cdot 17}{\underset{2}{\cancel{56}}} = \frac{51}{2} = 50\tfrac{1}{2}.$$

8. Während der Division kürzt man einen Rest, auf den nur Nullen folgen, mit dem Divisor.

Beispiel. $$\frac{5\;1\;\overset{11}{5}\;\overset{14}{9}\;00000:21}{2\;4\;5.}$$

Anstatt nun $\overset{14}{}00000$ durch 21 zu dividieren, dividiert man

$$\frac{\overset{2}{}00000:3}{66 \text{ u. s. w.}}$$

9. In der Regel ist es von Vorteil, den mehrstelligen unbequemen Divisor in solche Zahlen zu zerlegen, welche das Niederschreiben der abzuziehenden Partialprodukte unnötig machen.

Beispiel. 561927400 : 96?

Dafür:

$$\begin{array}{l} 561927400\,(:8 \\ \hline 70240925\,(:12 \\ \hline =5853410\tfrac{5}{12}. \end{array}$$

Man wird hierbei zuerst durch Zahlen dividieren, bei welchen die Division aufgeht.

In vorstehendem Beispiel daher zuerst durch 8.

Oder:

$$\begin{array}{l} 1763945:35 \\ \hline 352789\,(:5 \text{ (s. unten 11. Satz)} \\ \hline =50398\tfrac{3}{7}\,(:7. \end{array}$$

Kommt die vorstehende Regel nicht in Betracht, so nimmt man die Divisoren in folgender Ordnung: 2, 4, 8, ..., 5, 25, 125, ..., 3, 9, 11 und läfst dann erst die übrigen Zahlen folgen.

Beispiel.

$$\begin{array}{l} 46300000000:77 \\ \hline 4209090909\tfrac{1}{11}\,(:11 \\ \hline =601298701\tfrac{3}{7}\ (:7. \end{array}$$

10. Zuweilen ist es auch vorteilhaft, nicht durch einzelne Zahlen der Reihe nach zu dividieren, sondern durch ihr Produkt.

1. Beispiel. (58701297 : 8) : 25.

Dafür 58701297 : 200; daher $587012\cancel{97}:2\cancel{00}$

$$=293506\tfrac{97}{200}.$$

2. Beispiel. 239398645 : 7 : 11 : 13.

Dafür 239398645 : 1001 = 239159$\frac{486}{1001}$.

3919
9168
1596
5954
9495
486

11. Anstatt durch 5 zu dividieren, multipliciert man mit 2 und dividiert durch 10. Denn $\frac{a}{5} = \frac{a \cdot 2}{10}$.

Beispiel. 291835 : 5. Dafür 291835 · 2
583670 : 10
= 58367.

In der Praxis wird man bei der Multiplication die zuletzt entstehende 0 sofort weglassen.

Geht die Division durch 5, wie man aus der Endziffer sieht, nicht auf, so multipliciert man mit 2 und betrachtet die letzte Stelle als Zehntel.

1. Beispiel. 431982 : 5
= 86396$\frac{4}{10}$ (· 2.

2. Beispiel. 51029 : 5
= 10205$\frac{8}{10}$.

12. Anstatt durch 25 zu dividieren, multipliciert man mit 4 und dividiert durch 100; oder man multipliciert mit 4 und betrachtet die beiden letzten Stellen als Hundertel.

1. Beispiel. 643287300 : 25. Zuerst durch 100 dividiert, dann mit 4 multipliciert; folglich:

6432873 · 4
= 25731492.

2. Beispiel. 549276 : 25
21971$\frac{04}{100}$ (· 4
oder = 21971$\frac{4}{100}$.

13. Anstatt durch 125 zu dividieren, multipliciert man mit 8 und dividiert durch 1000; oder man multipliciert mit 8 und betrachtet die 3 letzten Stellen als Tausendtel.

Beispiel. 8639674 : 125
= 69117$\frac{392}{1000}$ (· 8.

14. Durch 625 dividiert man, indem man mit 16 multipliciert und durch 10000 dividiert.

15. Zuweilen läfst sich der Divisor in die vorstehenden Zahlen (5, 25, 125, ...) zerlegen.

Beispiel. 7846828 : 275.

$$\begin{array}{rl} \text{Dafür:} & 7846828 : 11 \\ \hline & 713348 : 25 \\ \hline & = 28533\tfrac{92}{100}\ (\cdot 4. \end{array}$$

16. Anstatt durch eine auf 5 sich endigende Zahl (die nicht durch 25 teilbar ist) zu dividieren, multipliciert man mit 2 und dividiert durch das Doppelte des ursprünglichen Divisors.

Beispiel. 746693 : 15.

$$\begin{array}{rl} \text{Dafür:} & 746693 \cdot 2 \\ \hline & 1493386 : 30 \\ \hline & = 49779\tfrac{16}{30}. \end{array}$$

Denn $a : 15 = \frac{a \cdot 2}{30}$.

17. Anstatt durch eine auf 25 oder 75 sich endigende Zahl (die nicht durch 125 teilbar ist) zu dividieren, multipliciert man mit 4 und dividiert durch das 4fache des ursprünglichen Divisor.

Beispiel. 7846828 : 275 (s. das Beispiel zum 15. Satz!)

$$\begin{array}{rl} \text{Dafür:} & 78468\ 28 \cdot 4 \\ \hline & \overset{10}{313873\ 12} : 1100 \\ \hline & = 28533\tfrac{1012}{1100}. \end{array}$$

18. Hat man mit irgend einer Zahl zu multiplicieren und durch eine andere Zahl, die nahe ein Vielfaches jener ist, zu dividieren, so bildet man zuerst aus beiden Zahlen durch Division einen passenden Multiplicator.

1. Beispiel. (58317 · 13) : 12?

$$\text{d. i. } 58317 \cdot \frac{13}{12} = 58317 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right).$$

$$\text{Daher:} \quad 58317 + \frac{58317}{12},$$

$$\begin{array}{rl} \text{oder:} & \left.\begin{array}{r} 58317\quad : 12 \\ 4859\tfrac{3}{4} \end{array}\right\} \text{addiert} \\ \hline & = 63176\tfrac{3}{4}. \end{array}$$

2. Beispiel. (7580931 · 39) : 19?

$$\text{Dafür:} \quad 7580931 \cdot \frac{39}{19} = 7580931 \cdot \left(2 + \frac{1}{19}\right). \quad \text{Folglich}$$

$$\begin{array}{rl} & 7580931 \quad \cdot 2 \\ \hline \text{addiert} & \left\{\begin{array}{l} 15161862 \\ \quad 398996\tfrac{7}{19}\ (= 7580931 : 19) \end{array}\right. \\ \hline & = 15560858\tfrac{7}{19}. \end{array}$$

3. Beispiel. $(66940743 \cdot 13) : 14$?

Dafür: $66940743 \cdot \frac{13}{14} = 66940743 \cdot \left(1 - \frac{1}{14}\right)$. Daher:

$$\text{subtr.} \left\{ \begin{array}{l} 66940743 \quad : 14 \\ \hline 4781481\tfrac{9}{14} \end{array} \right.$$
$$= 62159261\tfrac{5}{14}.$$

4. Beispiel. $(15560858 \cdot 67) : 17$?

Dafür: $15560858 \cdot \left(\frac{68}{17} - \frac{1}{17}\right) = 15560858\left(4 - \frac{1}{17}\right)$. Daher:

$$15560858$$
$$\text{subtr.} \left\{ \begin{array}{l} 62243432 \quad (\cdot 4 \\ \quad 915344\tfrac{10}{17} = 15560858 : 17 \end{array} \right.$$
$$= 61328087\tfrac{7}{17}.$$

Oft kann man nach Ausscheiden einer Zahl aus dem Multiplicator eine Zahl herstellen, die nahe ein Vielfaches des Divisor ist.

Beispiel. $(71936849 \cdot 54) : 19 = 71936849 \cdot 3 \cdot 18 : 19$

$$= 71936849 \cdot 3 \cdot \frac{18}{19} = (71936849 \cdot 3) \cdot \left(1 - \frac{1}{19}\right).$$

Daher: $71936849 \quad \cdot 3$

$$\text{subtr.} \left\{ \begin{array}{l} 215810547 \quad : 19 \\ \quad 11358449\tfrac{16}{19} \end{array} \right.$$
$$= 204452097\tfrac{3}{19}.$$

19. Um durch 75 zu dividieren, addiert man zum Dividend den 3. Teil desselben und dividiert die Summe durch 100.

1. Beispiel. $29187042 : 75$?

$$\begin{array}{l} 29187042 : 3 \\ 9729014 \\ \hline = 389160\tfrac{56}{100}. \end{array}$$

2. Beispiel. $45719268 : 75$?

$$\begin{array}{l} 45719268 : 3 \\ 15239756 \\ \hline = 609590\tfrac{24}{100}. \end{array}$$

Beweis. $a : 75 = a \cdot 4 : 300 = a \cdot 4 : 3 : 100 = a \cdot \frac{4}{3} : 100$

$$= a\left(1 + \frac{1}{3}\right) : 100 = \left(a + \frac{a}{3}\right) : 100.$$

20. Um durch 875 zu dividieren, addiert man zum Dividend den 7. Teil desselben und dividiert die Summe durch 1000.

Beispiel. $54387403 : 875$?

$$\begin{array}{l} 54387403 : 7 \\ 7769629 \\ \hline = 62157\tfrac{032}{1000} = 62157\tfrac{4}{125}. \end{array}$$

Beweis. $\frac{a}{875} = \frac{8a}{7 \cdot 1000} = \frac{a + \frac{a}{7}}{1000}$.

21. Man behalte folgende oft vorkommende Quotienten:

$$\frac{100}{4} = 25, \quad \frac{300}{4} = 75, \quad \frac{1000}{8} = 125, \quad \frac{3000}{8} = 375,$$

$$\frac{5000}{8} = 625, \quad \frac{7000}{8} = 875.$$

Beispiel. $\frac{129350000 : 8}{1616}$

Anstatt nun mit 70 : 8 fortzufahren, denkt man sich sogleich $\frac{7000}{8} = 875$. Daher $= 16168750$.

22. Oft kann man den Divisor dadurch in einen bequemen verwandeln, dafs man einen bestimmten Teil desselben addiert, wobei dann der Dividend um denselben Teil zu erhöhen ist.

Beispiel. 37639104 : 96.

Beide Zahlen um ihren 24. Teil erhöht:

```
  13 16 19 7 23 14
3 7 6 3 9 1 0 4 : 24;      96 : 24        Daher = 39207400 : 100
  1 5 6 8 2 9 6                4                = 392074.
3 9 2 0 7 4 0 0              100.
```

Beweis. $\frac{a}{b} = \frac{a\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{b\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{a + \frac{a}{n}}{b + \frac{b}{n}}$.

23. Weifs man, dafs die Division aufgehen mufs (in §. 23, 14, 1. Beisp. mufs 1541 durch 23 teilbar sein), so ist es bei der Division der vorletzten Stelle des Dividend nicht nötig, den Rest zu bestimmen, da sich die letzte Stelle des Quotient aus der letzten Stelle des Divisor und der letzten Stelle des Dividend ergeben mufs. Geht z. B. 20271 : 233 auf, so bestimmt man zuerst nur $\frac{2027\,1 : 233}{8}$ Ohne nun $8 \cdot 233$ zu berechnen und von 2027 zu subtrahieren, weifs man, dafs die noch fehlende Stelle des Quotient 7 ist, da nur diese Zahl mit der letzten Stelle 3 des Divisor multipliciert die letzte Stelle 1 des Dividend giebt ($7 \cdot 3 = 21$).

Folglich: $\frac{20271 : 233}{= \quad 87.}$

24. Anstatt durch eine Zahl zu dividieren, die nur wenig kleiner als eine bequeme runde Zahl ist, kann man durch diese runde Zahl selbst dividieren, wenn man vor der Subtraktion des

aus der runden Zahl hervorgehenden Partialproduktes die zugehörigen Stellen des Dividend um das Produkt aus der gefundenen Stelle des Quotient und der Differenz des benutzten und gegebenen Divisors erhöht.

1. Beispiel. 647925498 : 997.

Man dividiere durch 1000, weil aber $997 = 1000 - 3$, so erhöht man vor der Subtraktion des Partialproduktes (aus 1000) die betreffenden Stellen des Dividend um das 3fache der jedesmal erhaltenen Stelle des Quotient. Daher:

```
  18
647925498 : 1000 = 649875 123/997.
6000
   12
 4972
 4000
    27
  9845
  9000
     24
   8724
   8000
      21
    7489
    7000
       15
     5108
     5000
      123
```

Als Rest erhält man
das 1. Mal $479 + 6 \cdot (1000 - 997)$
„ 2. „ $972 + 4 \cdot (1000 - 997)$
u. s. w.

2. Beispiel. 41983276504 : 796?

$796 = 800 - 4$, folglich ist stets das 4fache der gefundenen Quotientenstelle zu addieren.

```
  20
41983276504 : 800 = 52742809 540/796.
4000
    8
 2183
 1600
    28
  5912
  5600
     16
   3407
   3200
       8
    2236
    1600
       32
     6445
     6400
        36
      7704
      7200
       540.
```

Als Rest erhält man
das 1. Mal $198 + 5 \cdot (800 - 796)$
„ 2. „ $583 + 2 \cdot (800 - 796)$
und zwar 583 aus $2183 - 1600$
u. s. w.

Beweis. Dividiert man (s. vorst. 2. Beispiel) vollständig: 4198 . . . . . : 796 = 5, so ist zuerst 4198 um 796 · 5 zu vermindern, d. i. 4198 — (800 — 4) · 5 = 4198 — (4000 — 20) = 4198 — 4000 + 20 = (4198 + 20) — 4000, wie in der Abkürzung.

25. Division durch 9.

Man schreibe zunächst die höchste Stelle des Dividend nieder, bilde alsdann die Quersumme aus den beiden höchsten Stellen des Dividend, hierauf die Quersumme aus den 3 höchsten Stellen des Dividend u. s. w., indem man immer zur vorhergehenden Quersumme die folgende Stelle addiert.

Jede der so erhaltenen Zahlen rückt man um eine Stelle nach rechts aus und addiert sie, jedoch ohne die letzte Stelle rechts (ohne die Einer der letzten Quersumme).

Ist die letzte Quersumme ein Vielfaches von 9, so läſst man zwar auch die Einer dieser Quersumme weg, erhöht aber die vorhergehende Stelle um 1.

Ist jedoch die letzte Quersumme kein Vielfaches von 9, so fügt man jener Summe der Quersummen eine Anzahl Neuntel hinzu, die man erhält, wenn man die letzte Quersumme um das nächstkleinere Vielfache von 9 vermindert.

1. Beispiel.

298736541 : 9

2 . . . . . = 2 (höchste Stelle des Dividend)
11 . . . . = 2 + 9 (die beiden höchsten Stellen)
19 . . . . = 11 + 8 (vorige Quers. + folg. Stelle 8)
26 . . . = 19 + 7 („ „ + „ „ 7)
29 u. s. w.
35
40
44
4~~5~~ Da diese letzte Quersumme ein Vielfaches von 9, so ist die letzte Stelle zu streichen und zur vorhergehenden Stelle 1 zu addieren.
1

= 33192949.

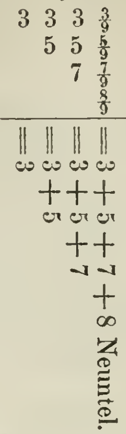
2. Beispiel.

51607382 : 9

5
6
12
12
19
22
30
32 (um 27, das nächstkleinere Vielfache von 9, vermindert = 5 = Zähler!)

= 5734153$\frac{5}{9}$.

Beweis. $1:9=\frac{1}{9}$, $10:9=1\frac{1}{9}$, $100:9=11\frac{1}{9}$, $1000:9=111\frac{1}{9}$ u. s. w. Daher $3578:9=3\cdot 111\frac{1}{9}+5\cdot 11\frac{1}{9}+7\cdot 1\frac{1}{9}+8\cdot\frac{1}{9}$, oder:



26. Die Fourier'sche abgekürzte Division (oder: die geordnete Division).

Man benutze als Divisor nur die höchsten Stellen des gegebenen vielstelligen Divisors, z. B. die 1. Stelle oder die beiden ersten Stellen. Mit diesem Divisor, den wir „Stückdivisor" (oder Teildivisor) nennen wollen, führt man also zunächst die Division allein aus. Der Übersicht wegen überstreiche man die als Stückdivisor benutzten Stellen des gegebenen Divisor. Die auf die Stellen des Stückdivisor folgenden Stellen des gegebenen Divisor mögen stets der Reihe nach mit d_1, d_2, d_3 . . . . ., die 1. Stelle des Quotient mit q_1, die 2. Stelle mit q_2 u. s. w. bezeichnet werden.

Den Dividend dividiert man wie gewöhnlich durch den angenommenen Stückdivisor, wodurch man die 1. Stelle (q_1) des Quotient erhält. Ferner multipliciert man wie bei der gewöhnlichen Division diese Stelle des Quotient mit dem Stückdivisor und zieht das Produkt von der betreffenden Stelle des Dividend ab. Nachdem man diese erste oder später irgend eine Stelle des Quotient durch Division mit dem Stückdivisor bestimmt und das betreffende Partialprodukt vom Dividend abgezogen hat, ist stets zu untersuchen, ob der Rest entweder gröfser (oder auch gleich) oder kleiner ist als die Quersumme ($q_1+q_2+\ldots.$) des bisherigen Quotient (die neueste Stelle desselben mit eingerechnet).

1. Fall. Der nach Abzug des Partialprodukts erhaltene Rest sei gröfser als die Quersumme des Quotient oder gleich derselben.

Alsdann hänge dem Reste die folgende Stelle des Dividend an, setze die nachstehenden 2 Zifferreihen unter einander, die erste

bestehend aus den bisher gefundenen Ziffern des Quotient in umgekehrter Ordnung, die 2. aus eben so viel auf den Stückdivisor folgenden Ziffern des gegebenen Divisor und ziehe die Summe der Produkte der untereinander stehenden Stellen dieser beiden Zifferreihen von jenem vergröſserten Reste ab.

Nach der Bestimmung der **1.** Stelle des Quotient und der Subtraktion des Produkts aus dieser Stelle des Quotient und dem Stückdivisor ist mithin die folgende Stelle des Dividend anzuhängen, alsdann $\begin{Bmatrix} q_1 \\ d_1 \end{Bmatrix}$ unter einander zu setzen und das Produkt $q_1 d_1$ von dem vergröſserten Reste zu subtrahieren.

Dividiere den jetzt erhaltenen Rest durch den Stückdivisor, um die 2. Stelle (q_2) des Quotient zu erhalten. Wie bei der gewöhnlichen Division subtrahiere das Produkt aus der neuen Stelle des Quotient und dem Stückdivisor und sieh wieder nach, ob der Rest gröſser (oder gleich) oder kleiner als die Quersumme der bis jetzt erhaltenen beiden Stellen des Quotient ($q_1 + q_2$) ist. Wäre er kleiner, so müſste der weiter unten folgende **2.** Fall berücksichtigt werden. Wäre er jedoch wieder gröſser (oder gleich), so füge (wie der 1. Fall vorschreibt) dem Reste die folgende Stelle des Dividend hinzu, subtrahiere $\begin{Bmatrix} q_2 & q_1 \\ d_1 & d_2 \end{Bmatrix} = q_2 d_1 + q_1 d_2$ und dividiere den Rest durch den bisherigen Stückdivisor, um die 3. Stelle des Quotient (q_3) zu erhalten. Ist der Rest gröſser als die Quersumme oder gleich der Quersumme des nun 3zifferigen Quotient ($q_1 + q_2 + q_3$), so füge dem Reste die folgende Stelle des Dividend hinzu, subtrahiere $\begin{Bmatrix} q_3 & q_2 & q_1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix} = q_3 d_1 + q_2 d_2 + q_1 d_3$ und dividiere den Rest durch den bisherigen Stückdivisor, um die 4. Stelle des Quotient zu erhalten u. s. w.

2. Fall. Der nach Abzug des Partialprodukts erhaltene Rest sei kleiner als die Quersumme des bis jetzt erhaltenen Quotient.

Dann sieh die so eben erhaltene Stelle des Quotient nicht als endgültige an, füge dem Reste, der so eben dividiert wurde, die folgende Stelle des Dividend hinzu und vergröſsere gleichzeitig den Stückdivisor um die nächste Stelle des gegebenen Divisor. Die auf diesen neuen (vergröſserten) Stückdivisor folgenden Stellen des Divisor bezeichne nun mit $d_1, d_2, d_3, \ldots$, während die 1. (höchste) Stelle des Quotient q_1, die 2. q_2 u. s. w. bleibt. Den jetzt um eine Stelle des Dividend vergröſserten Rest vermindere noch um $\begin{Bmatrix} q_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = q_1 d_1$, wenn

der bisherige endgültige Quotient (also der Quotient ohne die zuletzt erhaltene Stelle) aus einer Stelle besteht,

um $\begin{Bmatrix} q_2 q_1 \\ d_1 d_2 \end{Bmatrix} = q_2 d_1 + q_1 d_2$, wenn dieser Quotient aus 2 Stellen besteht,

um $\begin{Bmatrix} q_3 q_2 q_1 \\ d_1 d_2 d_3 \end{Bmatrix} = q_3 d_1 + q_2 d_2 + q_1 d_3$, wenn dieser Quotient aus 3 Stellen besteht u. s. w., und dividiere den erhaltenen Rest nun erst durch den neuen Stückdivisor, ziehe das Partialprodukt ab und sieh wieder, ob der Rest $\overline{>}$ oder $<$ die Quersumme des bisherigen Quotient ist, um eventuell nach dem 1. oder 2. Fall zu verfahren.

1. Beispiel. $625143221376 : 812686187789 = ?$

Es mögen hier die beiden ersten Stellen 81 des Divisor als Stückdivisor benutzt werden. Daher:

$625143221376 : \overline{81}2\ 6\ 86187789 = 7\ 6\ 9\ 2\ 3$
$\qquad\qquad\qquad\quad d_1 d_2 \qquad\qquad\quad q_1 q_2 q_3 q_4$

$567 \;= 81 \cdot 7$

58; da $58 > 7$ (Quersumme des bisherigen Quotient), so gilt der 1. Fall.

581

$14 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 2 \end{Bmatrix} = 7 \cdot 2$; denn bis jetzt ist der Divisor $\overline{81}2$ und der Quotient 7.

$567 : 81 = 6 = q_2$

$486 = 81 \cdot 6$

81; da $81 > 13$ (Quersumme $7 + 6$ des Quotient), so gilt der 1. Fall.

814

$54 = \begin{Bmatrix} q_2 q_1 \\ d_1 d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 67 \\ 26 \end{Bmatrix} = 6 \cdot 2 + 7 \cdot 6$; denn der Divisor ist bis jetzt . . . . . $\overline{81}26$ der Quotient 76.

$760 : 81 = 9 = q_3$

729

31 (fortzufahren, da $31 > 7 + 6 + 9$, siehe den Quotient)

313

$110 = \begin{Bmatrix} q_3 q_2 q_1 \\ d_1 d_2 d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 967 \\ 268 \end{Bmatrix} = 9 \cdot 2 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 8$; denn der Divisor ist . . $\overline{81}268$ der Quotient 769.

$203 : 81 = 2 = q_4$

162

41; da $41 > 7 + 6 + 9 + 2$ (siehe Quotient), so ist fortzufahren (1. Fall):

412

$148 = \begin{Bmatrix} q_4 q_3 q_2 q_1 \\ d_1 d_2 d_3 d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2967 \\ 2686 \end{Bmatrix} = 2 \cdot 2 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 6$

$264 : 81 = 3 = q_5$

264 : 81 = 3 = q_5? (wiederholt)
243
21 < 7 + 6 + 9 + 2 + 3; folglich 2. Fall und mithin gilt das hier in { } Gesetzte und der Quotient 3 nicht, vielmehr ist erst noch dem Reste 264 die folgende Stelle 2 des Dividend hinzuzufügen, der Stückdivisor um die nächste Stelle zu vergröſsern, also 812 statt 81 zu nehmen, so daſs nun

$$\ldots\ .:\overline{812}6\ 8\ 6\ 1\ 87789 = 7\ 9\ 6\ 2$$
$$d_1 d_2 d_3 d_4 \qquad q_1 q_2 q_3 q_4$$

gilt und vor der Division durch den neuen Stückdivisor noch $\begin{Bmatrix} q_4 q_3 q_2 q_1 \\ d_1 d_2 d_3 d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2967 \\ 6861 \end{Bmatrix} = 2\cdot 6 + 9\cdot 8 + 6\cdot 6 + 7\cdot 1 = 127$ vom vergröſserten Reste 2642 zu subtrahieren. Also:

$$26421376 : \overline{812}6\ 8\ 6\ 1\ 87789 = 7\ 6\ 9\ 2\ 307$$
$$d_1 d_2 d_3 d_4 \qquad q_1 q_2 q_3 q_4$$

$$127 = \begin{Bmatrix} q_4 q_3 q_2 q_1 \\ d_1 d_2 d_3 d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2967 \\ 6861 \end{Bmatrix} = 2\cdot 6 + 9\cdot 8 + 6\cdot 6 + 7\cdot 1$$

2515 : 812 = 3 = q_5
2436
79 > 7 + 6 + 9 + 2 + 3; folglich der 1. Fall.
791

$$150 = \begin{Bmatrix} 32967 \\ 68618 \end{Bmatrix} = 3\cdot 6 + 2\cdot 8 + 9\cdot 6 + 6\cdot 1 + 7\cdot 8$$

641 : 812 = 0 = q_6
0
641 > 7 + 6 + 9 + 2 + 3; 1. Fall.
6413

$$142 = \begin{Bmatrix} 032967 \\ 686187 \end{Bmatrix} = 0\cdot 6 + 3\cdot 8 + 2\cdot 6 + 9\cdot 1 + 6\cdot 8 + 7\cdot 1.$$

6271 : 812 = 7 = q_7 u. s. w.

2. Beispiel.

$$9862550688 : \overline{7}\,0\,8924 = 1\ \ 4$$
$$d_1 \qquad q_1$$

7
2 > 1 (Quersumme des Quotient 1); 1. Fall.
28

$$0 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1\cdot 0$$

28 : 7 = 4 = q_2

$28 : 7 = 4 = q_2$ (wiederholt)
28
$0 < 1 + 4$ (Quersumme des Quotient), folglich der 2. Fall. Das hier in { } Gesetzte und Quot. 4 gelten mithin nicht.

$2862550688 : 708\,9\,24 = 1\,3\,9\,1$
$d_1 d_2 \qquad q_1 q_2 q_3 q_4$

$$8 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 8 \end{Bmatrix} = 1 \cdot 8$$

$278 : 70 = 3 = q_2$
210
$68 > 1 + 3$ (s. Quotient), 1. Fall.
682

$$33 = \begin{Bmatrix} q_2 q_1 \\ d_1 d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31 \\ 89 \end{Bmatrix} = 3 \cdot 8 + 1 \cdot 9$$

$649 : 70 = 9 = q_3$
630
$19 > 1 + 3 + 9$ (s. Quotient); 1. Fall.
195

$$101 = \begin{Bmatrix} q_3 q_2 q_1 \\ d_1 d_2 d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 931 \\ 892 \end{Bmatrix} = 9 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 2$$

$94 : 70 = 1 = q_4$
70
$24 > 1 + 3 + 9 + 1$ (s. Quot.); 1. Fall.
245

$$99 = \begin{Bmatrix} q_4 q_3 q_2 q_1 \\ d_1 d_2 d_3 d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1931 \\ 8924 \end{Bmatrix} = 1 \cdot 8 + 9 \cdot 9 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4$$

$146 : 70 = 2 = q_5$
140
$6 < 1 + 3 + 9 + 1 + 2$; 2. Fall: } ungültig!

$1460688 : 7089\,2\,4 = 1\,3\,9\,1\,2\ \ldots\ldots$
$d_1 d_2 d_3 \qquad q_1 q_2 q_3 q_4 q_5$

$$39 = \begin{Bmatrix} 1931 \\ 9240 \end{Bmatrix};$$ hier ist $d_4 = 0$ die 7. Stelle des gegebenen Divisor!

$1421 : 708 = 2 = q_5$ u. s. w.

3. Beispiel.

$5816542998 : 42857143 = 14$
4
$1 =$ Quotient 1 (Quersumme), daher 1. Fall!
18

18 (wiederholt)

$$2 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ d_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 16 : 4 = 4 = q_2? \\ 16 \\ \overline{0 < 1 + 4;\ \text{folglich 2. Fall}} \end{array}\right\} \text{ungültig!}$$

$$161654299\mathrm{s} : 42857143 = 13572$$

$$8 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 8 \end{Bmatrix} = 1 \cdot 8;$$

$$\begin{array}{l} 153 : 42 = 3 = q_2 \\ 126 \\ \overline{276} \ (\text{Rest } 27 > 1 + 3!) \end{array}$$

$$29 = \begin{Bmatrix} 31 \\ 85 \end{Bmatrix} = 3 \cdot 8 + 1 \cdot 5;$$

$$\begin{array}{l} 247 : 42 = 5 \\ 210 \\ \overline{375} \ (\text{Rest } 37 > 1 + 3 + 5!) \end{array}$$

$$62 = \begin{Bmatrix} 531 \\ 857 \end{Bmatrix} = 5 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7$$

$$\begin{array}{l} 313 : 42 = 7 \\ 294 \\ \overline{194} \ (19 > 1 + 3 + 5 + 7) \end{array}$$

$$103 = \begin{Bmatrix} 7531 \\ 8571 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 91 : 42 = 2? \\ 84 \\ \overline{7 < 1 + 3 + 5 + 7 + 2.\quad \text{Daher:}} \end{array}\right\} \text{ungültig!}$$

$$912998 : 42857143 = 1357193$$

$$77 = \begin{Bmatrix} 7531 \\ 5714 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 835 : 428 = 1 \\ 428 \\ \overline{4079} \ (407 > 1 + 3 + 5 + 7 + 1) \end{array}$$

$$74 = \begin{Bmatrix} 17531 \\ 57143 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 4005 : 428 = 9 \\ 3852 \\ \overline{1539} \ (153 > 1 + 3 + 5 + 7 + 1 + 9) \end{array}$$

$$88 = \begin{Bmatrix} 917531 \\ 571430 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 1451 : 428 = 3 \\ 1284 \\ \overline{1678} \ (167 > 1 + 3 + 5 + 7 + 1 + 9 + 3) \end{array}$$

$5816542998_{00} : \overline{42}857143 = 135719336$ (wiederholt)
$\vdots$
$1678\ (167 > 1 + 3 + 5 + 7 + 1 + 9 + 3)$

$122 = \begin{Bmatrix} 3917531 \\ 5714300 \end{Bmatrix}$

$1556 : 428 = 3$
1284

$2720\ (272 > 1 + 3 + 5 + 7 + 1 + 9 + 3 + 3)$

$70 = \begin{Bmatrix} 33917531 \\ 57143000 \end{Bmatrix}$

$2650 : 428 = 6$ u. s. w.

4. Beispiel.

$1948547632 : \overline{6}29738546 = 3$

$\left\{ \begin{matrix} 18 \\ 1 < \text{Quotient } 3;\ 2.\ \text{Fall} \end{matrix} \right\}$ ungültig; folglich:

$1948547632 : \overline{6}29738546 = 309421$
186

88 (Rest $8 >$ Quersumme 3; 1. Fall)

$27 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \end{Bmatrix}$

$61 : 62 = 0$
0

615 (Rest $61 > 3 + 0$)

$21 = \begin{Bmatrix} 03 \\ 97 \end{Bmatrix}$

$594 : 62 = 9$
558

$364\ (36 > 3 + 0 + 9)$

$90 = \begin{Bmatrix} 903 \\ 973 \end{Bmatrix}$

$274 : 62 = 4$
248

$267\ (26 > 3 + 0 + 9 + 4)$

$123 = \begin{Bmatrix} 4903 \\ 9738 \end{Bmatrix}$

$144 : 62 = 2$
124

$206\ (20 > 3 + 0 + 9 + 4 + 2)$

$88 = \begin{Bmatrix} 24903 \\ 97385 \end{Bmatrix}$

$118 : 62 = 1$
62

$563\ (56 > 3 + 0 + 9 + 4 + 2 + 1)$

$563 \; (56 > 3 + 0 + 9 + 4 + 2 + 1$ (wiederholt)

$$119 = \begin{Bmatrix} 124903 \\ 973854 \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 444 : 62 = 7 \\ 434 \\ \hline 10 < 3 + 0 + 9 + 4 + 2 + 1 + 7 \end{array}\right\} \text{ungültig!}$$

4442*)$\ldots : 629738546 = 3094216{,}87$

$$108 = \begin{Bmatrix} 124903 \\ 738546 \end{Bmatrix}$$

*) Diese 2 ist die nun anzuhängende letzte Stelle des gegebenen Dividend. Behufs der spätern Fortsetzung denkt man sich nach dieser 2: Nullen.

$$\begin{array}{l} 4334 : 629 = 6 \\ 3774 \\ \hline 5600 \; (560 > 3 + 0 + 9 + 4 + 2 + 1 + 6) \end{array}$$

$$117 = \begin{Bmatrix} 6124903 \\ 7385460 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 5483 : 629 = 8 \\ 5032 \\ \hline 4510 \; (451 > 3 + 0 + 9 + 4 + 2 + 1 + 6 + 8) \end{array}$$

$$162 = \begin{Bmatrix} 86124903 \\ 73854600 \end{Bmatrix}$$

$4348 : 629 = 7$ u. s. w.

Die hier gelehrte Division kann erst durch spätere Sätze bewiesen werden.

27. Probe für die Division. Das Produkt aus Quotient und Divisor, vermehrt um den Rest, mufs den Dividend geben, denn es ist (s. §. 13, 29) $\frac{D}{d} = q + \frac{D - dq}{d}$, wo q der ganzzahlige Quotient und $D - dq$ der Rest ist. Multipliciert man nun $q + \frac{D - dq}{d}$ mit dem Divisor d, so erhält man $dq + (D - dq)$, d. i. Divisor $\times$ Quotient + Rest. Zugleich ist aber auch $dq + (D - dq) = D$, der Dividend.

§. 29. Neunerprobe.

Von den Zahlen der Aufgabe bildet man zuerst die sogenannten „Neunerreste“, indem man die Quersummen der Zahlen um ein Vielfaches von 9 so vermindert, dafs der Rest kleiner als 9 wird.

1. Beispiel. Der Neunerrest von 2876? Die Quersumme 23 um 18 vermindert, giebt den Neunerrest 5.

2. Beispiel. Von 205 ist die Quersumme 7, daher auch der Neunerrest $= 7$.

3. Beispiel. 5967? Die Quersumme ist 27, daher der Neunerrest $= 27 - 27 = 0$.

Mit diesen Resten statt der Zahlen selbst rechnet man die gegebene Aufgabe, wobei man alle auftretenden Zahlen auf Neunerreste zurückführt, indem man beliebige Vielfache von 9 subtrahiert oder addiert.

Ist der Neunerrest des erhaltenen Resultates gleich dem Neunerrest des zu prüfenden, so ist die Rechnung richtig — wenn sich die gemachten Fehler nicht gegenseitig compensierten.

Addition. Der Neunerrest der Summe mufs mit der Summe der Neunerreste der Summanden übereinstimmen.

$$\text{Beispiel.}\quad \begin{array}{r l} 5867 & \text{Neunerrest} = 8 \\ 396 & \phantom{\text{Neunerrest}} = 0 \\ 12202 & \phantom{\text{Neunerrest}} = 7 \\ 1548 & \phantom{\text{Neunerrest}} = 0 \\ \hline 20013 & \text{Neunerr.} = 6. \end{array} \left\} \begin{array}{l} 8+0+7+0=15, \text{ um} \\ \ 9 \text{ vermindert} = 6. \end{array} \right.$$

Da beide Neunerreste (= 6) überreinstimmen, so ist die Zahl 20013 richtig.

Beweis.

$$5867 = V_9 + 26 \text{ (s. §. 24, 10, 1. Zus.)} = V_9 + 18 + 8 = V_9 + 8$$

u. s. w.

Die Summe der gegebenen Zahlen ist nun

$$V_9 + 8 + V_9 + 0 + V_9 + 7 + V_9 + 0 = V_9 + 15 = V_9 + 9 + 6$$
$$= V_9 + 6.$$

Dies mufs mithin auch für die zu prüfende Summe sich ergeben.

Subtraktion.

1. Verfahren. Unmittelbar durch Subtraktion.

$$\text{Beispiel.}\quad \begin{array}{r l} 510042 & \text{Neunerrest} = 3 \\ 389563 & \phantom{\text{Neunerrest}} = 7 \\ \hline 120479 & \phantom{\text{Neunerrest}} = 5. \end{array} \quad 3-7=(9+3)-7=5.$$

Beide Reste (= 5) stimmen überein, daher die Zahl 120479 richtig.

2. Verfahren. Der Neunerrest des Subtrahend um den des Restes vermehrt mufs den des Minuend geben.

In Bezug auf das letzte Beispiel hat man Neunerrest 7 des Subtrahend + Neunerrest 5 des Restes = 12 = 3.

Da dies auch der Neunerrest des Minuend ist, so ist die Rechnung richtig.

Multiplication.

Beispiel.

$$49183 \cdot 9897 = \underbrace{486764151}_{6}$$

$$\text{Neunerreste} \quad \underbrace{7 \cdot 6}_{42}$$

42, um 36 vermindert = 6, übereinstimmend mit dem Neunerrest des Produkts, folglich richtig.

Beweis.

$$(V_9+7)\cdot(V_9+6)=V_9\cdot V_9+7\cdot V_9+6\cdot V_9+42=V_9+42$$
$$=V_9+36+6=V_9+6.$$

Division. Das Produkt der Neunerreste des Divisor und des Quotient um den des Restes vermehrt mufs den des Dividend geben.

Beispiel: $5619274:879=6392\frac{706}{879}$, d. i.
$5619274:879=6392$, Rest 706.

Neunerreste 7 $\underbrace{6 \cdot 2 + 4}$
$12+4=16$, um 9 vermindert $=7$,
übereinstimmend mit dem Neunerrest des Dividend, folglich richtig.

§. 30. Elferprobe.

Die zunächst zu bildenden Elferreste erhält man, wenn man die Summe der Einheiten der 1., 3., 5. . . . . Ordnung (also die der Einer, Hunderte u. s. w.) um die Summe der Einheiten der geradzahligen Ordnungen vermindert. Ist die erstere Summe kleiner als die zweite, so ist jene um ein passendes Vielfache von 11 zu vermehren, so dafs der Elferrest immer kleiner als 11 ist.

1. Beispiel:
Der Elferrest von 58379 ist $9+3+5-(7+8)=2$.

2. Beispiel. Der Elferrest von 42548 ist:
$8+5+4-(4+2)=17-6=11$, um 11 vermindert $=0$.

3. Beispiel. Der Elferrest von 29175 ist
$5+1+2-(7+9)=8-16=8+11-16=3$.

4. Beispiel. Der Elferrest von 9192804 ist
$4+8+9+9-(0+2+1)=30-3=27=27-22=5$.

Mit den Elferresten verfährt man der Aufgabe gemäfs ganz so, wie es im vorhergehenden Paragraphen mit den Neunerresten geschah.

Addition.

5867	Elferrest = 4	$4+0+10+6=20$
91806	= 0	$=20-11=9$,
8392	= 10	übereinstimmend mit
171	= 6	dem Elferreste der
106236	Elferrest = 9.	

Summe, folglich richtig.

Subtraktion. (Vergl. §. 29).

I. 20160	Elferrest = 8	$8-10=19-10=9$;
19238	= 10	
922	Elferrest = 9,	übereinstimmend mit dem

vorhergehenden Resultate, folglich richtig.

II. 510042 Elferrest $=5$ } Shd. $9+$ Rest $7=16,\ 16-11=5$;
389563 $=9$

120479 Elferrest $=7$, übereinstimmend mit dem Elferrest des Minuend, folglich richtig.

Multiplication.

$$3849 \cdot 756 \cdot 924 = 2688695856;$$
Elferreste $\underbrace{10 \cdot 8 \cdot 0}_{=0.}$ $\quad 37-26=11=0.$

Beide Reste $=0$, folglich richtig.

Division.

$$5619274 : 879 = 6392, \text{ Rest } 706,$$
Elferreste $1 \quad \underbrace{10 \cdot 1 + 2}_{=12=1.}$

Beide Reste $=1$, folglich richtig.

Beweis.

$$879 \cdot 6392 + 706 = (V_{11}+10) \cdot (V_{11}+1) + V_{11} + 2$$
$$= V_{11} \cdot V_{11} + 10 \cdot V_{11} + V_{11} \cdot 1 + 10 \cdot 1 + V_{11} + 2$$
$$= V_{11} + 10 + 2 = V_{11} + 12 = V_{11} + V_{11} + 1 = V_{11} + 1.$$
(S. §. 24, 11).

§. 31. Gemeine Brüche.

1. Bruch (gebrochene Zahl) ist der als eine einzige Zahl gedachte und mit dem Bruchstrich geschriebene Quotient. $\frac{5}{7}$ bedeutet also den Wert, welchen man aus der Division $5:7$ erhält $=(5:7)$, siehe §. 12, 3. $\frac{3}{4}$ Meter kann zunächst nur als der 4. Teil von 3 Metern, nicht aber als das Dreifache eines Viertelmeters betrachtet werden (s. §. 13, 18, Anmerk.)

Die Sätze in Bezug auf die Bruchrechnung sind im Allgemeinen identisch mit den in §. 13 gelehrten Divisionssätzen und werden hier nur in einer der Praxis angemesseneren Form und Ordnung wiederholt, in Bezug auf gewisse Formen (z. B. der gemischten Zahl) aber auch erschöpfender behandelt.

2. In $\frac{5}{7}$ ist 5 der Zähler (Dividend), 7 der Nenner (Divisor). Zähler und Nenner heifsen die Glieder des Bruches.

3. Ist der Wert eines Bruches kleiner als 1, so ist er ein echter Bruch; z. B. $\frac{5}{8}$, $\frac{12}{20}$. Der Zähler ist alsdann kleiner als der Nenner.

Der unechte Bruch ist gröfser als 1, der Zähler gröfser als der Nenner; z. B. $\frac{7}{3}$, $\frac{12}{4}$. (Siehe §. 13, 13.)

Der Bruch ist ein uneigentlicher (ein Scheinbruch), wenn der Zähler ein Vielfaches des Nenners ist, der Bruch also einer ganzen Zahl gleich ist; z. B. $\frac{12}{3}$, $\frac{5}{5}$. Eigentliche Brüche sind daher $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{21}{14}$, $\frac{9}{24}$.

Ist der Zähler = 1, so wird der Bruch zuweilen Stammbruch genannt (s. §. 13, 18), z. B. $\frac{1}{8}$; ist der Zähler nicht = 1: Zweigbruch (abgeleiteter Bruch); z. B. $\frac{5}{8}$.

Gemischte Zahl ist die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten (einfachen) Bruche. Diese Summe wird ohne Additionszeichen geschrieben. $3\frac{2}{5}$, $48\frac{1}{7}$ sind gemischte Zahlen mit der Bedeutung $3+\frac{2}{5}$, $48+\frac{1}{7}$. Die gemischte Zahl darf nur aus speziellen Zahlen bestehen. Daher bedeutet $3\frac{2}{a}$ so viel als $3\cdot\frac{2}{a}$ (s. §. 10, 1).

Sind Zähler und Nenner nicht einfache ganze Zahlen (der Bruch also kein einfacher), sondern selbst wieder gebrochen, so ist die Form ein Doppelbruch (zusammengesetzter, gebrochener, vielfacher, unreiner, gemischter, doppelter Bruch).

Beispiel. $\frac{2}{\frac{3}{4}}$, $\frac{4\frac{1}{3}}{\frac{7}{8}}$, $\frac{\frac{3}{4}}{12\frac{1}{2}}$.

Brüche mit gleichen Nennern heifsen gleichnamige, z. B. $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{12}$; mit verschiedenen Nennern: ungleichnamige.

Generalnenner oder Hauptnenner (gemeinschaftlicher Nenner, Kopfnenner) gegebener Brüche ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner derselben. Der Generalnenner der Brüche $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{7}{20}$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen 12, 18, 30, 20. Der Generalnenner von $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{7}$ und $\frac{4}{13}$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 3, 10, 7, 13.

1. Anmerkung. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{201}$, $\frac{1}{502}$, $\frac{7}{2}$, $4\frac{2}{5}$, $\frac{\frac{1}{2}}{4}$,

$\frac{2\frac{1}{2}}{9}$, $\frac{6}{7\frac{1}{5}}$ lies: ein Halb, ein Drittel, zwei Drittel, ein Viertel, drei Zweihundert-und-eintel, ein Fünfhundert-und-zweitel, sieben Halbe, 4 und $\frac{2}{5}$ (nicht: vier zwei Fünftel), ein halb Viertel, $2\frac{1}{2}$ Neuntel, 6 durch $7\frac{1}{5}$.

2. Anmerkung. Aufser den Brüchen von der Form $\frac{a}{b}$ (den gemeinen Brüchen) giebt es noch Brüche anderer Form, z. B. Decimalbrüche (0,18; 73,4, s. §. 38), Kettenbrüche $\left(\frac{1}{8+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}}\right.$, s. §. 91$\left.\right)$.

§. 32. Formänderungen der Brüche.

1. Ganze in Bruchform.

Am einfachsten giebt man der ganzen Zahl (als Zähler) den Nenner 1 (s. §. 13, 7), z. B. $18 = \frac{18}{1}$. Für andere Nenner wendet man §. 13, 3 an. Um aus 24 z. B. Fünftel zu bilden:

$$24 = \frac{24 \cdot 5}{5} = \frac{120}{5}.$$

2. Einrichten der Brüche, d. i. Verwandeln der gemischten Zahl in einen unechten Bruch. Um den Zähler des unechten Bruches zu erhalten, multipliciere die ganze Zahl mit dem Nenner und addiere zu dem Produkte den gegebenen Zähler.

Beispiele.

$$8\tfrac{4}{7} = \frac{8 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{60}{7}; \quad 1\tfrac{13}{14} = \frac{1 \cdot 14 + 13}{14} = \frac{27}{14}$$

(s. §. 13, 13, 2. Zus.).

3. Verwandeln eines unechten Bruches in eine gemischte Zahl (Umkehrung des 2. Satzes). Der Zähler ist einfach durch den Nenner (z. B. mittelst der Partialdivision) zu dividieren.

Beispiele.

$$\frac{7}{3} = 7:3 = 2\tfrac{1}{3}; \quad \frac{1357}{24} = 1357:24 = 56\tfrac{13}{24}.$$

4. Erweitern. Multipliciere Zähler und Nenner mit derselben Zahl. Der erweiterte Bruch ist dem ursprünglichen gleich. (§. 13, 15).

Beispiel. $\frac{8}{9}$ mit 5 erweitert $= \frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{40}{45}$.

Ist ein Bruch in einen andern mit gegebenem Nenner zu verwandeln, so ist der Quotient aus dem neuen und alten Nenner

die Zahl, mit welcher erweitert werden mufs (§. 13, 15, 2. Zus.) Z. B. $\frac{6}{7} = \frac{\cdots}{35}$. Hier ist $\frac{6}{7}$ mit $35:7 = 5$ zu erweitern, und man erhält $\frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{30}{35}$.

5. Kürzen. Enthalten Zähler und Nenner ein gröfseres gemeinsames Mafs als 1, so ist der Bruch ein reducibler (reductibler, kürzbarer). Man kürzt denselben durch dieses Mafs, d. h. dividiert Zähler und Nenner durch dasselbe, um einen Bruch mit kleineren Zahlen (also bequemern Bruch), jedoch von gleichem Werte zu erhalten. (§. 13, 17.)

Beispiel. $\frac{21}{35}$? Das gemeinsame Mafs beider Zahlen ist 7, daher $= \frac{21:7}{35:7} = \frac{3}{5}$.

Brüche, welche sich nicht kürzen lassen, nennt man irreducible (irreductible), z. B. $\frac{15}{32}$.

Beim Kürzen kann man die nachstehenden 4 Fälle unterscheiden:

I. Die gemeinsamen Mafse (vorzüglich 2, 4, 8, ..., 5, 25, 125, ..., 3, 9, 11, ...) nach den Regeln der Teilbarkeit (siehe §. 24) in beiden Zahlen sofort erkennbar.

Beispiel. $\frac{18744}{74184}$? Die Quersumme beider Zahlen ist durch 3, die beiden letzten Stellen durch 4 teilbar, folglich kann man zunächst durch 12 kürzen:

$$\frac{18744}{74184}\Bigg|\overbrace{=\frac{1562}{6182}}^{:12}.$$

Noch durch 2 gekürzt $= \frac{781}{3091}$.

Da ferner im Zähler $7 + 1 - 8 = 0$ und im Nenner die Differenz aus 1 und $12 = 11$ ist, so läfst sich der Bruch auch noch durch 11 kürzen:

$$\frac{781}{3091}\Bigg|\overbrace{=\frac{71}{281}}^{:11}.$$

Da 71 eine Primzahl, die nicht im Nenner enthalten ist, so kann der Bruch nicht weiter gekürzt werden.

II. Die Mafse nur in einer Zahl nach den Regeln der Teilbarkeit erkennbar.

Zerlege diese Zahl nach §. 25, 1 in Faktoren und versuche das Kürzen mittelst der nun bekannt werdenden Primfaktoren.

1. Beispiel. $\frac{187}{731}$? Man erkennt im Zähler sogleich 11, welche Zahl den Bruch jedoch nicht kürzt. Jetzt ergiebt sich aber $\frac{187}{731} = \frac{11 \cdot 17}{731}$. Da der Zähler aufser 11 nur noch die Primzahl 17 enthält, so sind nun nur noch 2 Fälle möglich: entweder der Bruch ist durch 17 kürzbar oder er ist irreducibel. Man findet:

$$\frac{11 \cdot 17}{731} \Big| \overbrace{= \frac{11}{43}}^{:17}.$$

2. Beispiel. $\frac{1273}{1675}$? Hier läfst sich der Nenner leicht zerlegen und man erhält $\frac{1273}{25 \cdot 67}$. Da 5 und 25 nicht kürzen, so kann das Kürzen nur noch mit der Primzahl 67 versucht werden. Man findet:

$$\frac{1273}{25 \cdot 67} \Big| \overbrace{= \frac{19}{25}}^{:67}.$$

III. Die Mafse in keiner Zahl erkennbar. Hier ist die Kettendivision (siehe §. 26, II) anzuwenden.

1. Beispiel: $\frac{33017}{53293}$?

```
                53293 : 33017 = 1
                33017
           .....: 20276 (4 ausgeschieden:)
           33017 : 5069 = 7
           35483
      .....: 2466 (18 ausgeschieden:)
      5069 : 137 = 37
      411
       959
       959
         0.
```

Der gegebene Bruch durch 137 gekürzt $= \frac{241}{389}$.

2. Beispiel: $\frac{48169}{80181}$? Nach den Regeln der Teilbarkeit erkennt man im Zähler 11, im Nenner 9. Daher $= \frac{11 \cdot 4379}{9 \cdot 8909}$. Mithin ist nur noch 4379 mit 8909 zu kürzen.

$$\begin{array}{l} 8909 : 4379 = 1 \\ \underline{4379} \\ \ldots . : 4530 \text{ (10 und 3 ausgeschieden:)} \\ 4379 : 151 = 29 \\ \underline{302} \\ 1359 \\ \underline{1359} \\ 0. \end{array}$$

Daher noch durch 151 gekürzt $= \frac{11 \cdot 29}{9 \cdot 59} = \frac{319}{531}$.

IV. Beim Addieren und Subtrahieren der Brüche kennt man gewöhnlich sämtliche im Nenner enthaltenen Maſse. Mithin ist das Kürzen auch nur durch diese Maſse möglich.

Beispiel. $\frac{4121}{6435}$? Weiſs man, daſs $6435 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$, so sieht man augenblicklich nach den Regeln der Teilbarkeit, dass 3, 5 und 11 im Zähler nicht enthalten sind. Folglich ist das Kürzen nur noch mit 13 zu versuchen. Man findet:

$$\frac{4121}{6435}\Bigg| \overbrace{= \frac{317}{495}}^{:13}.$$

1. Zusatz. Beim Kürzen wende man ferner die in §. 28 gelehrten Vorteile an.

Beispiel. $\frac{325}{775}$ mit 4 erweitert $= \frac{1300}{3100} = \frac{13}{31}$.

2. Zusatz. Um einen Bruch annähernd in einen andern mit bestimmtem Nenner, der kein Vielfaches des Nenners jenes gegebenen Bruches ist, zu verwandeln, erweitere man mit dem neuen Nenner und kürze alsdann durch den gegebenen Nenner.

Es sei z. B. $\frac{5}{13}$ in 18^{tel} zu verwandeln $= \frac{5 \cdot 18}{13 \cdot 18} = \frac{90}{13 \cdot 18}$, durch 13 gekürzt $= \frac{7}{18}$.

3. Zusatz. Dasselbe läſst sich erreichen, wenn man Zähler und Nenner um einen bestimmten Teil erhöht oder erniedrigt (siehe §. 28, G, 22).

Beispiel. $\frac{47}{61} = \frac{47 + \frac{47}{16}}{61 + \frac{61}{15}} = \frac{47 + 3}{61 + 4} = \frac{50}{65} = \frac{10}{13}$.

4. Zusatz. Sind Zähler und Nenner Produkte, so vergesse man §. 11, 8 nicht. (Vergl. §. 13, 18, 3. Zus.)

Beispiel. $\frac{51 \cdot 247}{65 \cdot 1207}$. Da die 3 in 51 nicht kürzt, so zerlege $51:3=17$ und versuche nun 17. Man findet $\frac{51 \cdot 247}{65 \cdot 1207}$ durch 17 gekürzt $=\frac{3 \cdot 247}{65 \cdot 71}$. Im Nenner erkennt man nun sofort die Maſse 5, 13, 71. Hier kommt offenbar nur 13 in Betracht und durch diese Zahl gekürzt, ergiebt sich $\frac{3 \cdot 19}{5 \cdot 71}=\frac{57}{355}$.

6. Bestimmen des Generalnenners. Hier ist unverändert §. 27 anzuwenden.

Beispiele.

Generalnenner von $18, 24, 30, 40 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 40 \cdot 9 = 360$;
" " 16 und $72 = 16 \cdot 9 = 144$;
" " $66, 75, 55, 39, 65, 100 = 4 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 11 \cdot 13$
$= 100 \cdot 3 \cdot 143 = 42900$.
" " $7, 8, 9 = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

7. Gleichnamigmachen der Brüche.

Um die Brüche $\frac{23}{42}, \frac{17}{48}, \frac{11}{28}, \frac{32}{33}, \frac{43}{44}$ gleichnamig zu machen, suche man zuerst den Generalnenner (von 42, 48, 28, 33, 44)
$= 16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 3696$.

Um $\frac{23}{42}$ in 3696tel zu verwandeln, dividiere man nicht $3696:42$, sondern benutze die schon vorhandenen Faktoren von 3696. Daher mit $\frac{3696}{42}$, d. i. $\frac{16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 7}$ oder mit 88 erweitert.

Ist der Zähler des gegebenen Bruches um 1 kleiner als der Nenner, so erhält man den neuen Zähler, wenn man vom Generalnenner die Zahl abzieht, mit welcher zu erweitern ist. Daher: $\frac{43}{44}$ erweitert mit $\frac{16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 11} = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$ und mithin $\frac{43}{44}$ $=\frac{3696-84}{3696}=\frac{3612}{3696}$; denn $\frac{43}{44}=1-\frac{1}{44}=\frac{3696}{3696}-\frac{84}{3696}$.

1. Zusatz. Wird bei unverändertem Nenner der Zähler gröſser, so wird auch der Wert des Bruches gröſser (§. 13, 18, 2. Zus.). Wird bei unverändertem Zähler der Nenner gröſser, so wird umgekehrt der Wert des Bruches kleiner (§. 13, 23, 1. Zus.).

Beispiele. $\frac{7}{18} > \frac{5}{18}$; $\frac{7}{18} < \frac{7}{17}$.

2. Zusatz. Um die Brüche $\frac{3}{7}, \frac{13}{32}, \frac{23}{56}, \frac{31}{75}, \frac{33}{80}$ vom

kleinsten zum gröfsten anzuordnen, mache sie gleichnamig. Man findet für dieselben:

$$\frac{7200}{16800},\quad \frac{6825}{16800},\quad \frac{6900}{16800},\quad \frac{6944}{16800},\quad \frac{6930}{16800}.$$

Folglich nach aufsteigendem Werte geordnet:

$$\frac{13}{32},\quad \frac{23}{56},\quad \frac{33}{80},\quad \frac{31}{75},\quad \frac{3}{7}.$$

(Ein anderes Verfahren lehrt §. 47, 1).

8. Eine Zahl, die gröfser als 670 und kleiner als $670\frac{1}{2}$ ist, liegt offenbar der Zahl 670 näher als der Zahl 671; dagegen würde eine Zahl, die gröfser als $670\frac{1}{2}$ und kleiner als 671 ist, der Zahl 671 näher als 670 liegen. Wenn man daher für $670\frac{1}{3}$ und $670\frac{2}{3}$ z. B. nur ganze Zahlen setzen wollte, so hätte man, um einen möglichst kleinen Fehler zu begehen, in jenem Falle 670, im letztern Falle 671 zu setzen.

Beim Abwerfen der Brüche, eine Operation, die bei der Anzahl von Individuen offenbar nötig ist, beobachtet man daher folgende Regel:

> Ist der Bruch kleiner als $\frac{1}{2}$, so läfst man ihn einfach weg, ist er dagegen $=\frac{1}{2}$ oder gröfser als $\frac{1}{2}$, so vermehrt man die Anzahl der Ganzen um 1.

Anstatt $92\frac{5}{6}$ Personen, $24\frac{1}{4}$ ₰, $538\frac{1}{2}$ ₰ würde man daher 93 Personen, 24 ₰, 539 ₰ zu setzen haben.

§. 33. Addition mit Brüchen.

1. $37\frac{5}{8}+9$?

$$\begin{array}{r} 37\frac{5}{8} \\ 9 \\ \hline =46\frac{5}{8}. \end{array}$$

2. Gleichnamige Brüche.

1. Beispiel.

$$\frac{1}{14}+\frac{5}{14}+\frac{3}{14}+\frac{9}{14}=\frac{1+5+3+9}{14}=\frac{18}{14}=1\frac{4}{14}=1\frac{2}{7}$$

(s. §. 13, 13).

2. Beispiel. $73\frac{11}{18}+948\frac{13}{18}=?$

$$\begin{array}{r} 73\frac{11}{18} \\ 948\frac{13}{18} \\ \hline =1022\frac{1}{3}. \end{array}$$

Hier erhielt man zunächst $\frac{11+13}{18}=\frac{24}{18}=1\frac{6}{18}=1\frac{1}{3}$; daher war zu addieren:

$$\begin{array}{r} 73 \\ 948 \\ 1\frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

3. Ungleichnamige Brüche sind zuvor gleichnamig zu machen und dann ist wie im 2. Satz zu verfahren.

Beispiel.

$$38\tfrac{11}{42} + 169\tfrac{38}{39} + \frac{1}{28} + 1526\tfrac{47}{48} + 9\tfrac{25}{112} = ?$$

Der Generalnenner ist

$$16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = (8 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7) = 104 \cdot 42 = 4368.$$

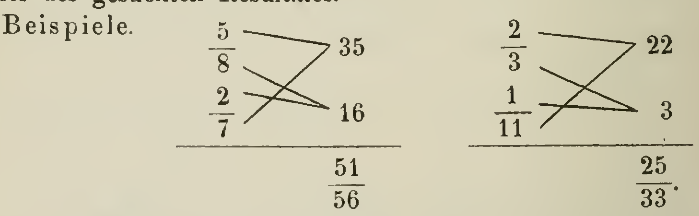
Folglich:

	$4368 = 16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$
$38\tfrac{11}{42}$	1144, d. i. $\frac{11}{42} = \frac{1144}{4368}$ } s. §. 32, 7.
$169\tfrac{38}{39}$	4256, d. i. $\frac{38}{39} = \frac{4256}{4368}$ } s. §. 32, 7.
$\frac{1}{28}$	156
$1526\tfrac{47}{48}$	4277
$9\tfrac{25}{112}$	975. Die Summe dieser Zähler mit dem Nenner 4368 giebt $\frac{10808}{4368}$, daher:
$+ 2\tfrac{37}{78}$	$10808 : 4368 = 2\tfrac{2072}{4368} = 2\tfrac{37}{78}$ (s. §. 32, 5, 4. Zus.)
	8736
$= 1744\tfrac{37}{78}$	2072.

4. Vorteile.

a. Um 2 Brüche zu addieren, vermehrt man das Produkt aus der 1. und 4. Zahl um das Produkt aus der 2. und 3. Die erhaltene Summe ist der Zähler, das Produkt der Nenner der Nenner des gesuchten Resultates.

Beispiele.



Der Beweis ergiebt sich leicht aus der vollständigen Addition.

b. Hat der Bruch sehr nahe den Wert 1, so verfährt man in folgender Weise:

$$4\tfrac{11}{12} + 8\tfrac{3}{8} = 5 - \frac{1}{12} + 8\tfrac{3}{8} = 13\tfrac{3}{8} - \frac{1}{12} = 13\tfrac{9}{24} - \frac{2}{24} = 13\tfrac{7}{24}.$$

c. Die in sämtlichen Zählern, desgleichen die in sämtlichen Nennern enthaltenen gemeinsamen Maſse kann man ausheben.

Beispiele.

$$\frac{7}{8}+\frac{7}{9}=7\cdot\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)=7\cdot\frac{17}{72} \text{ (nach dem Vorteile a)}$$

$$=\frac{119}{72}=1\tfrac{47}{72};$$

$$\frac{15}{28}+\frac{25}{42}=\frac{5}{14}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{14}\cdot\frac{19}{6}=\frac{95}{84}=1\tfrac{11}{84};$$

$$\frac{11}{24}+\frac{7}{36}=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{11}{2}+\frac{7}{3}\right)=\frac{1}{12}\cdot\frac{47}{6}=\frac{47}{72}.$$

d. Von vielen Brüchen vereinigt man zunächst nur diejenigen, deren Nenner hinsichtlich der gemeinsamen Maſse nahe verwandt sind.

Beispiele.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{7}=\frac{1}{2}+\frac{2}{7}=\frac{11}{14};$$

$$\frac{7}{12}+\frac{11}{15}+\frac{3}{8}+\frac{17}{20}+\frac{1}{6}=\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{11}{15}+\frac{17}{20}\right)+\frac{3}{8}$$

$$=\frac{3}{4}+1\tfrac{7}{12}+\frac{3}{8}=2\tfrac{1}{3}+\frac{3}{8}=2\tfrac{17}{24}.$$

§. 34. Subtraktion mit Brüchen.

1. $110\frac{2}{3}-87$?

$$\begin{array}{r} 110\frac{2}{3} \\ 87 \\ \hline =23\frac{2}{3}. \end{array}$$

2. Gleichnamige Brüche:

$$\frac{17}{36}-\frac{5}{36}=\frac{17-5}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3} \text{ (s. §. 13, 13).}$$

3. Ungleichnamige Brüche sind zuvor gleichnamig zu machen.

Beispiel.

$$\begin{array}{r|l} & \underbrace{}_{} 30 \\ 230100\frac{5}{6} & 25 \\ 91387\frac{3}{10} & 9 \\ \hline =138713\frac{8}{15} & \frac{16}{30}=\frac{8}{15}. \end{array}$$

4. Ist der Minuend eine ganze Zahl, der Subtrahend gebrochen, so hat man vom Minuend 1 Ganzes zu borgen und dasselbe in einen Bruch zu verwandeln, dessen Nenner = dem Nenner des gegebenen Bruches ist.

Beispiel. $\begin{array}{r} 5610 \\ -\,4963\frac{17}{32}? \\ \hline \end{array}$ Man denke sich $5610=5609+\frac{32}{32}$,

$$\text{daher:}\quad \begin{array}{r} 561.0.\frac{32}{32} \\ -496\,3\,\frac{17}{32} \\ \hline =64\,6\,\frac{15}{32}. \end{array}$$

5. Ist der Bruch des Subtrahend gröfser als der Bruch des Minuend, so sind beide Brüche gleichnamig zu machen, hierauf 1 Ganzes vom Minuend zu borgen und dasselbe mit dem Bruche desselben zu vereinigen, indem man den neuen Zähler des Minuend um den Generalnenner vermehrt.

Beispiel. $\left.\begin{array}{r} 230400\frac{15}{28} \\ -48906\frac{37}{42} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 230400\frac{45}{84} \\ -48906\frac{74}{84}. \end{array}\right.$

Den Minuend denke man sich nun $= 230399 + \frac{84}{84} + \frac{45}{84}$

$$= 230399 + \frac{129}{84};$$

$$\text{daher:}\quad \begin{array}{r|l} 2304.0.0.\frac{15}{28} & \left.\begin{array}{c} 84 \\ 45 \end{array}\right\} \text{addiert} \\ & \left.\begin{array}{c} 129 \\ 74 \end{array}\right\} \text{subtrahiert} \\ -489\,0\,6\,\frac{37}{42} & \\ \hline =181\,49\,3 & \frac{55}{84}. \end{array}$$

Oft ist es vorteilhaft, zuerst den Zähler des Subtrahend von dem Zähler des der geborgten Einheit gleichen Bruches abzuziehen und dann den Zähler des Minuend zum Rest zu addieren. Im vorstehenden Beispiele würde man den Zähler 55 des gesuchten Restes $\frac{55}{84}$ einfacher dadurch erhalten, dafs man den geborgten Zähler 84 um den Zähler 74 des Subtrahend vermindert $(= 10)$ und hierzu den Zähler 45 des Minuend addiert $= 55$.

6. Vorteile.

a. Vergl. §. 33, 4, a:

$$\begin{array}{rr} \frac{5}{11} & 35 \\ -\frac{2}{7} & 22 \\ \hline & =\frac{13}{77}. \end{array}$$

b. Vergl. §. 33, 4, b: $21\frac{2}{9} - 13\frac{11}{12} = 21\frac{2}{9} - \left(14 - \frac{1}{12}\right)$

$$= 21\frac{2}{9} - 14 + \frac{1}{12} = 7\frac{2}{9} + \frac{1}{12} = 7\frac{11}{36}.$$

c. Vergl. §. 33, 4, c.

Beispiel. $\frac{49}{88} - \frac{14}{33} = \frac{7}{11}\left(\frac{7}{8} - \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{11} \cdot \frac{5}{24} = \frac{35}{264}.$

d. Vergl. §. 33, 4, d.

Beispiele.

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{8}-\frac{1}{6}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{7}{8}=1\tfrac{3}{8};$$

$$13\tfrac{11}{14}+15\tfrac{13}{18}-7\tfrac{5}{42}-\frac{17}{36}=(13\tfrac{11}{14}-7\tfrac{5}{42})+\left(15\tfrac{13}{18}-\frac{17}{36}\right)$$
$$=6\tfrac{2}{3}+15\tfrac{1}{4}=21\tfrac{11}{12};$$

$$29\tfrac{13}{18}+8\tfrac{5}{24}-7\tfrac{16}{45}-16\tfrac{11}{40}=29+8-7-16+\frac{13}{18}-\frac{16}{45}$$
$$-\frac{11}{40}+\frac{5}{24}=14+\left(\frac{13}{18}-\frac{16}{45}\right)-\left(\frac{11}{40}-\frac{5}{24}\right)$$
$$=14+\frac{11}{30}-\frac{1}{15}=14\tfrac{3}{10}.$$

Anmerkung. Die Nachsilbe „.... tehalb" bedeutet die Verminderung um $\frac{1}{2}$.

Beispiele. Fünftehalb $=5-\frac{1}{2}=4\tfrac{1}{2}$; anderthalb $=2-\frac{1}{2}=1\tfrac{1}{2}$; drittehalb $=3-\frac{1}{2}=2\tfrac{1}{2}$.

§. 35. Multiplication mit Brüchen.

1. Multiplication eines einfachen Bruches mit einer ganzen Zahl.

Bevor man nach §. 13, 19 den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert, kürzt man letztere mit dem Nenner.

Beispiele.

$$\frac{11}{18}\cdot 24 \text{ (gedacht } \frac{11\cdot 24}{18}\Big)=\frac{11}{\underset{3}{\cancel{18}}}\cdot\overset{4}{\cancel{24}}=\frac{44}{3}=14\tfrac{2}{3};$$

$$65\cdot\frac{31}{39}=\overset{5}{\cancel{65}}\cdot\frac{31}{\underset{3}{\cancel{39}}}=\frac{155}{3}=51\tfrac{2}{3}.$$

Ist jedoch ein Bruch mit seinem Nenner zu multiplicieren, so erhält man, ohne irgend eine Multiplication auszuführen, direkt den Zähler (s. §. 13, 10). Z. B. $\frac{13}{19}\cdot 19=13$.

Vorteile.

a. Man versetze den Nenner unter die ganze Zahl.

Beispiele.

$$\frac{13}{17} \cdot 69 = 13 \cdot \frac{69}{17} = 13 \cdot 4\tfrac{1}{17} = (13 \cdot \frac{1}{17} + 13 \cdot 4 =)\, 52\tfrac{13}{17};$$

$$\frac{15}{19} \cdot 37 = 15 \cdot \frac{37}{19} = 15 \cdot \left(2 - \frac{1}{19}\right) = 30 - \frac{15}{19} = 29\tfrac{4}{19}.$$

b. Ist der Bruch nur wenig kleiner als 1, so verfahre in folgender Weise:

$$39187 \cdot \frac{11}{12} = 39187 \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 39187 - \frac{39187}{12}$$
$$= 39187 - 3265\tfrac{7}{12} \text{ u. s. w.}$$

c. Man denke sich den Bruch als Summe von mehreren Brüchen.

Beispiel.

$$125398 \cdot \frac{7}{12} = 125398 \left(\frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right) = 125398 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{125398}{3} + \frac{125394}{4} = 41799\tfrac{1}{3} + 31348\tfrac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

Oder auch:

$$125398 \cdot \left(\frac{6}{12} + \frac{1}{12}\right) = 125398 \cdot \frac{1}{2} + 125398 \cdot \frac{1}{12}$$
$$= \frac{125398}{2} + \left(\frac{125398}{2} : 6\right);$$

daher:
```
  125398  :2
  62699   :6
  10449⅚
= 73148⅚.
```

Anmerkung. §. 48 lehrt, wie diese Brüche ohne alle Versuche gefunden werden.

2. Multiplication eines einfachen Bruches mit einem einfachen.

Kürze zunächst jeden Zähler mit dem andern Nenner, alsdann multipliciere nach §. 13, 26 Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner.

1. Beispiel.

$$\frac{5}{32} \cdot \frac{24}{25} \left(\text{gedacht } \frac{5 \cdot 24}{32 \cdot 25}\right) = \frac{\overset{}{\not 5}}{\underset{4}{\not{32}}} \cdot \frac{\overset{3}{\not{24}}}{\underset{5}{\not{25}}} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20};$$

2. Beispiel. $\frac{11}{437} \cdot \frac{95}{101}$? 95 und 437 kann nicht durch 5 gekürzt werden, wohl aber läſst 95 : 5 den andern Faktor 19 in 95 erkennen, mit dem das Kürzen zu versuchen ist.

Daher: $$\frac{11}{\underset{23}{\cancel{437}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{95}}}{101} = \frac{55}{2323}.$$

3. Beispiel. $\frac{551}{803} \cdot \frac{1241}{1537}$? In 803 ist 11 erkennbar, welche Zahl jedoch in 1241 nicht enthalten ist. $803 : 11 = 73$ ist nun die Zahl, mit welcher das Kürzen zu versuchen ist. In der That ist $1241 : 73 = 17$. Nach den Regeln der Teilbarkeit findet man kein gemeinsames Maſs von 551 und 1537; daher (s. §. 26):

$1537 : 551 = 3$
$\underline{1653}$
$\ldots\ldots : 116$ (4 ausgeschieden:)
$551 : 29 = 19.$

Mithin läſst sich 551 und 1537 durch 29 kürzen und man erhält:

$$\frac{\overset{19}{\cancel{551}}}{\underset{11}{\cancel{803}}} \cdot \frac{\overset{17}{\cancel{1241}}}{\underset{53}{\cancel{1537}}} = \frac{323}{583}.$$

3. Multiplication einer gemischten Zahl mit einer ganzen Zahl.

Multipliciere die ganze Zahl zuerst mit dem Bruche, dann mit der ganzen Zahl der gemischten Zahl, um beide Produkte zu addieren. Enthält jenes erste Produkt Ganze, so sind diese zum 2. Produkt zu addieren.

1. Beispiel. $5\frac{2}{3} \cdot 7$? Zuerst $\frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$; hierauf
$5 \cdot 7 = 35$, daher $35 + 4\frac{2}{3} = 39\frac{2}{3}$.

Beweis. $5\frac{2}{3} \cdot 7 = \left(5 + \frac{2}{3}\right) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot 7$ u. s. w.

2. Beispiel.

$\underline{9583146\frac{31}{48} \cdot 64}$
$41\frac{1}{3} \quad = \frac{31}{48} \cdot 64!$
$\left.\begin{array}{r}38332584\\57498876\;\end{array}\right\} = 9583146 \cdot 64$
$\overline{= 613321385\frac{1}{3}}.$

Ist der Multiplicator eine kleine Zahl, so setzt man das Produkt sogleich unter die gemischte Zahl, indem man die aus dem Bruche hervorgehenden Ganzen sofort zu dem Produkte aus den Einern der gemischten Zahl addiert.

Beispiel. $\dfrac{8651473\frac{7}{12} \cdot 8}{69211788\frac{2}{3}.}$ Hier ist $\frac{7}{12} \cdot 8 = 4\frac{2}{3}$, diese 4 aber ist sogleich zu 3 Einern $\cdot$ 8 zu addieren.

Vorteile.

a. $9\frac{5}{14} \cdot 56$? Multipliciere $(9\frac{5}{14} \cdot 14) \cdot 4 = 131 \cdot 4$.

b. Die gebrochene Zahl nur wenig kleiner als die nächsthöhere ganze Zahl. (Vergl. 1. Satz, b).

Beispiel. $58676 \cdot 19\frac{7}{8}$? Man denke sich

$$58676\left(20 - \frac{1}{8}\right) = (58676 \cdot 20) - (58676 : 8).$$

c. Der Zähler der zugehörigen ganzen Zahl gleich.

Beispiel. $76543 \cdot 7\frac{7}{12}$? Man denke sich

$$76543 \cdot 7 \cdot 1\tfrac{1}{12} = 535801 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right) = 535801 + (535801 : 12).$$

d. Die Summe des Zählers und der zugehörigen ganzen Zahl um 1 kleiner als der zugehörige Nenner.

Beispiel. $7\frac{5}{13} \cdot 9134$? Da hier $7 + 5$ um 1 kleiner als 13, so denke man sich:

$$\left(8 - \frac{8}{13}\right) \cdot 9134 = \left(1 - \frac{1}{13}\right) \cdot 8 \cdot 9134 = \left(1 - \frac{1}{13}\right) \cdot 73072$$
$$= 73072 - (73072 : 13).$$

e. Behält man von der gemischten Zahl nur die Einer und den Bruch, die eingerichtet einen Zähler geben, der dem vorher weggelassenen Teile der ganzen Zahl gleich ist, so kann man wie im 3. Vorteil verfahren.

Beispiel. $59183 . 118\frac{6}{13} = 59183 \cdot (110 + 8\frac{6}{13})$

$$= 59183 \cdot \left(110 + \frac{110}{13}\right)$$
$$= 59183 \cdot 110 \cdot \left(1 + \frac{1}{13}\right) \text{ s. Vorteil c.}$$

f. Die Differenz aus der gemischten Zahl und dem nächsthöhern Zehner sei eine gemischte Zahl, die eingerichtet einen Zähler gebe, der jenem nächsthöhern Zehner gleich sei.

Beispiel.

$$65987 \cdot 122\tfrac{6}{17} = 65987 \cdot (130 - 7\tfrac{11}{17}) = 65987\left(130 - \frac{130}{17}\right)$$

wie im 4. Vorteil.

g. Statt der gemischten Zahl nimmt man den eingerichteten Bruch, wenn dessen Zähler eine bequeme runde Zahl ist, oder solche durch Erweitern wird.

Daher: $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$; $33\frac{1}{3} = \frac{100}{3}$; $14\frac{2}{7} = \frac{100}{7}$;

$16\frac{2}{3} = \frac{50}{3} = \frac{100}{6}$; $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$; $1\frac{2}{3} = \frac{10}{6}$; $1\frac{1}{4} = \frac{10}{8}$;

$12\frac{1}{2} = \frac{100}{8}$; $8\frac{1}{3} = \frac{100}{12}$; $7\frac{1}{7} = \frac{100}{14}$; $6\frac{1}{4} = \frac{100}{16}$; $6\frac{2}{3} = \frac{100}{15}$;

$$166\tfrac{2}{3} = \frac{1000}{6};\quad 83\tfrac{1}{3} = \frac{1000}{12};\quad 66\tfrac{2}{3} = \frac{1000}{15};\quad 62\tfrac{1}{2} = \frac{1000}{16};$$

$$41\tfrac{2}{3} = \frac{1000}{24};\quad 31\tfrac{1}{4} = \frac{1000}{32};\quad 37\tfrac{1}{2} = \frac{300}{8};\quad 41\tfrac{2}{3} = \frac{500}{12};$$

$$58\tfrac{1}{3} = \frac{700}{12};\quad 46\tfrac{2}{3} = \frac{700}{15};\quad 18\tfrac{3}{4} = \frac{300}{16};\quad 43\tfrac{3}{4} = \frac{700}{16};$$

$$583\tfrac{1}{3} = \frac{7000}{12}.$$

Beispiel. $81397 \cdot 83\tfrac{1}{3} = 81397000 : 12.$

In gleicher Weise: $13\tfrac{1}{3} = 10 + \frac{10}{3}$; $11\tfrac{2}{3} = 10 + \frac{10}{6}$;

$$11\tfrac{3}{7} = 10 + \frac{10}{7};\quad 11\tfrac{1}{9} = 10 + \frac{10}{9}\ \left(\text{oder } = \frac{100}{9}\right);$$

$$133\tfrac{1}{3} = 100 + \frac{100}{3};\quad 116\tfrac{2}{3} = 100 + \frac{100}{6};\quad 66\tfrac{2}{3} = 100 - \frac{100}{3};$$

$$83\tfrac{1}{3} = 100 - \frac{100}{6};\quad 82\tfrac{8}{11} = 100 - \frac{3}{11}\cdot 100.$$

Beispiel.
$$\begin{array}{rl} 81397 \cdot 83\tfrac{1}{3} = 8139700 & :6 \\ 1356616\tfrac{2}{3} & \text{subtr.} \\ \hline = 6783083\tfrac{1}{3}. & \end{array}$$

4. Multiplication einer gemischten Zahl mit einem einfachen Bruche.

I. Ist die gegebene ganze Zahl eine kleinere, so ist es fast immer vorteilhaft, die gemischte Zahl einzurichten und dann wie im 3. Satze zu verfahren.

Beispiele.

$$4\tfrac{4}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{\overset{3}{\cancel{24}}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{16}}} = \frac{9}{2} = 4\tfrac{1}{2};$$

$$19\tfrac{1}{2} \cdot \frac{12}{13} = \frac{\overset{3}{\cancel{39}}}{2} \cdot \frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{13}} = 18;$$

$$1\tfrac{1}{12} \cdot \frac{6}{65} = \frac{\cancel{13}}{\underset{2}{\cancel{12}}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\underset{5}{\cancel{65}}}\ \left(\text{d. i. } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5},\ \text{s. §. 13, 18, 3. Zus.}\right) = \frac{1}{10}.$$

II. Ist die ganze Zahl eine gröſsere, so multipliciert man die gemischte Zahl nach dem 3. Satze mit dem Zähler des einfachen Bruches und dividiert das Produkt (ohne es einzurichten) durch den Nenner desselben. Denn um $89375\tfrac{2}{3} \cdot \frac{33}{46}$ zu multiplicieren,

denke man sich zunächst $89375 \cdot \frac{33}{46} = \frac{89375 \cdot 33}{46}$, folglich ist auch $89375\frac{4}{9} \cdot \frac{33}{46} = \frac{89375\frac{4}{9} \cdot 33}{46}$, die Rechnung daher folgende:

$$\begin{array}{l}
89375\frac{4}{9} \cdot 33 \\
\hline
\qquad 14\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot 33 \\
268125 \\
268125 \\
\hline
2949389\frac{2}{3} : 46 = 64117 \\
276 \\
\hline
\;189 \\
\;184 \\
\hline
\quad 53 \\
\quad 46 \\
\hline
\quad\; 78 \\
\quad\; 46 \\
\hline
\quad\; 329 \\
\quad\; 322 \\
\hline
\qquad 7\frac{2}{3} : 46 = \frac{23}{3} : 46 = \frac{23}{3 \cdot 46} \text{ (s. §. 13, 24)} = \frac{1}{6}.
\end{array}$$

Das gesuchte Resultat daher $= 64117\frac{1}{6}$.

Hier blieb bei der Division der ganzen Zahl 2949389 durch 46 der Rest 7. Es lehrt nun §. 13, 29, 3. Zus., dafs der Rest $7\frac{2}{3}$ gleichfalls noch durch 46 dividiert werden mufs. Man kann sich dies auch so denken:

$$\frac{2949389\frac{2}{3}}{46} = \frac{2949382 + 7\frac{2}{3}}{46} = \frac{2949382}{46} + \frac{7\frac{2}{3}}{46} \text{ (s. §. 13, 12)}$$
$$= 64117 + (7\frac{2}{3} : 46).$$

Die Division ist vor der Multiplication auszuführen, wenn man sieht, dafs jene aufgehen mufs.

Beispiel. $71948\frac{4}{7} \cdot \frac{11}{5}$? Da man beim Einrichten der gemischten Zahl als neuen Zähler ..... $8 \cdot 7 + 4 =$ ..... 0 erhalten mufs und diese Zahl wegen der Endziffer 0 durch 5 teilbar ist, so rechnet man:

$$\begin{array}{r}
71948\frac{4}{7} : 5 \\
\hline
14389\frac{5}{7} \cdot 11 \\
\hline
158286\frac{6}{7}.
\end{array}$$

5. Multiplication einer gemischten Zahl mit einer gemischten Zahl.

I. Bei kleineren gemischten Zahlen richtet man ein.

Beispiel. $3\frac{3}{14}\cdot 8\frac{5}{9} = \frac{\overset{5}{\cancel{45}}}{\underset{2}{\cancel{14}}}\cdot\frac{\overset{11}{\cancel{77}}}{\cancel{9}} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$.

II. Bei gröſseren gemischten Zahlen richtet man nur die kleinere ein und verfährt nach dem 4. Satze.

Beispiel. $8670425\frac{23}{78}\cdot 2\frac{7}{68} = 8670425\frac{23}{78}\cdot\frac{143}{68}$.

Hier ist nun $8670425\frac{23}{78}\cdot 143$ wie im 2. Beispiele des 3. Satzes zu multiplicieren und das Produkt (ohne es einzurichten) durch 68 zu dividieren.

Mithin: $8\,6\,7\,0\,4\,2\,5\frac{23}{78}\cdot 143;\quad \frac{23}{\underset{6}{\cancel{78}}}\cdot\overset{11}{\cancel{143}} = \frac{253}{6} = 42\frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{r}
42\frac{1}{6} \\
26011275 \\
34681700 \\
8670425 \\
\hline
1239870817\frac{1}{6}:68 \\
\hline
{\scriptstyle 13\ 3\ 5\ 5\ 6\ 16\ 7} \\
309967704\frac{7}{24}(:4 \\
\hline
18233394\frac{151}{408}(:17
\end{array}\Bigg\}\ \text{s. §. 28, G, 9 u. §. 35, 4, II.}$$

III. Ist jede ganze Zahl (der beiden gemischten Zahlen) ein Vielfaches des andern Nenners, so multipliciert man jeden der beiden Teile der einen gemischten Zahl mit jedem der beiden Teile der andern.

Beispiel.

$$21\frac{5}{6}\cdot 24\frac{3}{7} = 21\cdot 24 + \frac{5}{6}\cdot 24 + 21\cdot\frac{3}{7} + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{7}.$$

$$\begin{array}{rr}
\text{Daher:}\quad 21\cdot 24 = & \left\{\begin{array}{r}24\\48\end{array}\right. \\
\frac{5}{6}\cdot 24 = & 20 \\
21\cdot\frac{3}{7} = & 9 \\
\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{7} = & \frac{5}{14} \\
\hline
 & 533\frac{5}{14}.
\end{array}$$

Beweis. Man denke sich $\left(21+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(24+\frac{3}{7}\right)$ und wende hierauf §. 10, 9 an.

Vorteile.

a. Ist der Zähler der gemischten Zahl 1, so kann man in folgender Weise verfahren:

$$
\begin{array}{ll}
 & 819\tfrac{2}{3} \cdot 7\tfrac{1}{4} \\
\text{addiert} \left\{ \begin{array}{l} 204\tfrac{11}{12} \\ 5737\tfrac{2}{3} \end{array} \right. & \begin{array}{l} (= 819\tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 819\tfrac{2}{3} : 4) \\ (= 819\tfrac{2}{3} \cdot 7) \end{array} \\
 & = 5942\tfrac{7}{12}.
\end{array}
$$

b. Die gemischte Zahl sei nur wenig kleiner als eine ganze Zahl.

Beispiel.

$$351676 \cdot 19\tfrac{7}{8} = 351676 \cdot \left(20 - \frac{1}{8}\right) = 351676 \cdot 20 - 351676 \cdot \frac{1}{8}.$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Daher:} & 351676 \cdot 20 \\
 & 7033520 \\
 & \quad 43959\tfrac{1}{2} = 351676 : 8 \text{ subtr.} \\
 & = 6989560\tfrac{1}{2}.
\end{array}
$$

c. $$39\tfrac{3}{5} \cdot 40\tfrac{2}{5} = \left(40 - \frac{2}{5}\right)\left(40 + \frac{2}{5}\right) \text{ (siehe §. 28, F, 29)}$$

$$= 40 \cdot 40 - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 1600 - \frac{4}{25} = 1599\tfrac{21}{25}.$$

6. Bei mehr als 2 Faktoren verwandle man die gemischten Zahlen in unechte Brüche und dividiere alsdann das Produkt aller Zähler und ganzen Zahlen durch das Produkt der Nenner (nach dem Kürzen dieser Zahlen).

Beispiel.

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot 24 \cdot 5\tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{96} = \frac{4 \cdot 15 \cdot 24 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 1}{9 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 60 \cdot 96}$$

$$\text{gekürzt } = \frac{\not{4} \cdot \not{15} \cdot \not{24} \cdot \not{16} \cdot 1 \cdot 1}{9 \cdot \not{16} \cdot 3 \cdot \not{60} \cdot \underset{4}{\not{96}}}$$

(nämlich 4·24 mit 96, 16 mit 16, 15 mit 60)

$$= \frac{1}{9 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{108}.$$

7. Besondere Ausdrücke.

I. „Von“ und „davon“ bedeutet in Verbindung mit einem einfachen Bruche so viel als „mal“.

Beispiele.

A hinterläſst 12000 ℳ. *B* erhält $\frac{3}{8}$ davon. Folglich erhält *B*: $\frac{3}{8} \cdot 12000 = 4500$ ℳ.

N bekommt $\frac{1}{4}$ von 150 ℳ. Folglich bekommt er $\frac{1}{4} \cdot 150 = 37\tfrac{1}{2}$ ℳ.

II. Welche Zahl ist $\frac{2}{7}$mal so grofs als 28? Antwort:

$$\frac{2}{7} \cdot 28 = 2 \cdot 4 = 8.$$

Welche Zahl ist noch $\frac{1}{6}$mal so grofs als 30? Antwort:

$$\left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdot 30 = 30 + 5 = 35 \text{ (s. §. 12, 7).}$$

§. 36. Division mit Brüchen.

1. Eine Gröfse durch sich selbst dividiert giebt 1 (s. §. 13, 8).

Beispiele. $937\frac{11}{18} : 937\frac{11}{18} = 1$; $\frac{1}{234} : \frac{1}{234} = 1$.

2. Der Divisor eine ganze Zahl.

I. Der Dividend ganze Zahl.

a. Der Dividend kleiner als der Divisor.

Beispiel. $51 : 119 = \frac{51}{119}$, noch gekürzt $= \frac{3}{7}$ (s. §. 31, 1).

b. Der Dividend gröfser als der Divisor.

1. Beispiel. $81928 : 79 = 1037\frac{5}{79}$

$$\begin{array}{l} 79 \\ \hline \;\;292 \\ \;\;237 \\ \hline \;\;\;\;558 \\ \;\;\;\;553 \\ \hline \end{array}$$

$$5 : 79 = \frac{5}{79}. \text{ (Vergl. §. 13, 29.)}$$

2. Beispiel. 7631928 : 84. Hier ist §. 28, G, 9 anzuwenden:

$$\begin{array}{r} {}^{4}\;{}^{7}\;{}^{11}\;{}^{11}\;{}^{4} \\ 7\,6\,3\,1\,9\,2\,8 \;\; (:12 \\ \hline 6\,3\,5\,9\,9\,4 \;\; (:7 \\ \hline 9\,0\,8\,5\,6\frac{2}{7}. \end{array}$$

II. Der Dividend ein einfacher Bruch.

Stelle den Divisor als Faktor in den Nenner und kürze vor der Berechnung des neuen Nenners. (Vergl. §. 13, 24, Anm.)

Beispiele.

$$\frac{12}{13} : 18 = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{13 \cdot \underset{3}{\cancel{18}}} = \frac{2}{39};$$

$$\frac{15}{17} : 5 = \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{17 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{17}.$$

III. Der Dividend gemischte Zahl.

a. Der Dividend kleiner als der Divisor.

Richte den Dividend ein und verfahre wie unter II.

Beispiel.

$$4\tfrac{2}{7} : 9 = \frac{\overset{10}{\cancel{30}}}{7 \cdot \underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{10}{21}.$$

Haben die beiden ganzen Zahlen und der Zähler ein gemeinsames Maſs (> 1), so ist zuvor mit demselben zu kürzen.

Beispiel. $9\tfrac{6}{7} : 15$ durch 3 gekürzt $3\tfrac{2}{7} : 5 = \frac{23}{7 \cdot 5} = \frac{23}{35}$.

$$\text{Denn } \frac{9 + \frac{6}{7}}{15} = \frac{\left(9 + \frac{6}{7}\right) : 3}{15 : 3} \text{ (s. §. 13, 12).}$$

b. Der Dividend gröſser als der Divisor.

Dividiere unmittelbar ohne einzurichten.

1. Beispiel. $2949389\tfrac{2}{3} : 46$ (siehe §. 35, 4, II nebst Beweis für das Verfahren!).

2. Beispiel. $1239870817\tfrac{1}{6} : 68$ (siehe §. 35, 5, II).

3. Beispiel. $9483\tfrac{9}{17} : 185$? Da

$$9483 \cdot 17 + 9 = \ldots\ldots 1 + 9 = \ldots\ldots 0,$$

so ist zuerst durch 5, dann durch 37 zu dividieren.

Bei kleineren Divisoren setze den Quotient unmittelbar unter den Dividend.

Beispiel.

$$\begin{array}{l} 1\,7\,\overset{6}{6}\,3\,8\,\overset{5}{0}\,\tfrac{3}{5} : 11 \\ \hline \quad 1\,6\,0\,3\,4\tfrac{3}{5}. \end{array}$$

Hier blieb nach Bestimmung der 4 Einer $6\tfrac{3}{5}$ als Rest, daher:

$$6\tfrac{3}{5} : 11 = \frac{33}{5 \cdot 11} = \frac{3}{5} \text{ (s. §. 35, 4, II).}$$

Man beachte ferner die Vorteile in §. 28, G, 4 u. 5.

Beispiele. $3149\tfrac{4}{9} : 100 = 31$ vermehrt um $49\tfrac{4}{9} : 100$

$$= 31 + \frac{445}{9 \cdot 100} = 31 + \frac{89}{9 \cdot 20}$$

$$= 31\tfrac{89}{180}.$$

$$\begin{array}{l} 6391824\tfrac{2}{7} : 42000 = 6391 \,\vdots\, 824\tfrac{2}{7} : 42\cancel{000} = 152 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 42 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad 219 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 210 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad 91 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 84 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad 7824\tfrac{2}{7} : 42000 = \dfrac{54770}{7 \cdot 42000} = \dfrac{5477}{29400}; \end{array}$$

daher das gesuchte Resultat $= 152\tfrac{5477}{29400}$.

3. Der Divisor gebrochen (einfacher Bruch oder gemischte Zahl).

Hier ist die Division (mit Ausnahme eines besondern im Zusatze gegebenen Falles) stets in eine Multiplication mit reciprokem Divisor zu verwandeln (§. 13, 28, III, 1. Zus.). Die hierher gehörenden Beispiele erfordern also nur §. 35, 1, 2 und 4.

Beispiele.

$$\frac{7}{9} : \frac{5}{6} = \frac{7}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{5} = \frac{14}{15};$$

$$12 : \frac{3}{4} = \overset{4}{\cancel{12}} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = 16;$$

$$1 : 7\tfrac{1}{2} = 1 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15};$$

$$7\tfrac{1}{5} : 1\tfrac{1}{15} = \frac{\overset{9}{\cancel{36}}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{27}{4} = 6\tfrac{3}{4};$$

$$5\tfrac{1}{9} : \frac{46}{81} = \frac{46}{9} \cdot \frac{81}{46} = 9;$$

$$\frac{3}{14} : 4\tfrac{5}{7} = \frac{\cancel{3}}{\underset{2}{\cancel{14}}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\underset{11}{\cancel{33}}} = \frac{1}{22}\ (!);$$

$$27693\tfrac{6}{7} : \frac{15}{23} = 27693\tfrac{6}{7} \cdot \frac{23}{15} \quad (\text{s. §. 35, 4, II}),$$

$$56013\tfrac{11}{15} : 2\tfrac{7}{13} = 56013\tfrac{11}{15} : \frac{33}{13} = 56013\tfrac{11}{15} \cdot \frac{13}{33} \quad (\text{s. §. 35, 4, II}).$$

Die Division einer gebrochenen Zahl durch eine ganze Zahl ist nie nach dieser Regel auszuführen, sondern stets nach dem 2. Satze II und III unmittelbar. Also nicht

$$\frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8} : \frac{3}{1} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{24}, \text{ sondern } \frac{7}{8} : 3 = \frac{7}{8 \cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

Zusatz. Ist der Zähler des Dividend durch den Zähler des Divisor, der Nenner des Dividend durch den Nenner des Divisor teilbar, so führt man die Division nach dem Satze

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} \text{ aus.}$$

Beweis.

$$\text{Quot.} \times \text{Dsr.} = \frac{a : c}{b : d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a : c \cdot c}{b : d \cdot d} = \frac{a}{b} \quad (\text{s. §. 13, 10, A}).$$

Beispiel. $\frac{12}{35} : \frac{6}{7} = \frac{12:6}{35:7} = \frac{2}{5}$.

Vorteil. Zuweilen können bei der Division zweier gebrochenen Zahlen die ganzen Zahlen und Zähler durch dieselbe Zahl gekürzt werden.

Beispiele.

$12 : 18\frac{6}{7}$, gekürzt durch $6 = 2 : 3\frac{1}{7}$ u. s. w.

$14\frac{7}{8} : 35\frac{21}{22}$, gekürzt durch $7 = 2\frac{1}{8} : 5\frac{3}{22}$ u. s. w.

4. Bei mehr als 2 Brüchen sind die ganzzahligen Divisoren gleichfalls in den Nenner zu setzen und die gebrochenen nach dem 3. Satze zu behandeln.

Beispiel.

$$\frac{5}{9} : 14 \cdot 1\frac{7}{8} : 2\frac{2}{7} : \frac{25}{32} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 32}{9 \cdot 14 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 25},$$

$$\text{gekürzt:} = \frac{\cancel{5} \cdot \overset{3}{\cancel{15}} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{32}}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot \underset{2}{\cancel{14}} \cdot 8 \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{25}} = \frac{1}{3 \cdot 8} = \frac{1}{24}.$$

5. Besondere Ausdrücke.

Welche Zahl ist $3\frac{1}{5}$mal so klein als 100?

Antwort: $100 : 3\frac{1}{5} = \overset{25}{\underset{}{\cancel{100}}} \cdot \frac{5}{\underset{4}{\cancel{16}}} = \frac{125}{4} = 31\frac{1}{4}$.

Welche Zahl ist $\frac{1}{6}$mal so klein als $1\frac{1}{2}$?

Antwort: $1\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{1} = 9$.

Wie oft ist $\frac{2}{13}$ in $\frac{6}{7}$ enthalten?

Antwort: $\frac{6}{7} : \frac{2}{13} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{7} \cdot \frac{13}{\cancel{2}} = \frac{39}{7} = 5\frac{4}{7}$mal.

Welches ist der $6\frac{1}{2}$te Teil von 80?

Antwort: $80 : 6\frac{1}{2} = 80 \cdot \frac{2}{13} = \frac{160}{13} = 12\frac{4}{13}$.

Welches ist der $\frac{1}{5}$te Teil von 12?

Antwort: $12 : \frac{1}{5} = 60$.

Welche Zahl ist noch 7mal so klein als $10\frac{2}{3}$?

Antwort: $10\frac{2}{3} : (1 + 7) = \frac{32}{3} : 8 = 1\frac{1}{3}$ (s. §. 12, 7).

Welche Zahl ist noch $\frac{1}{4}$-mal so klein als 30?

Antwort: $30:\left(1+\frac{1}{4}\right)=30:\frac{5}{4}=24.$

§. 37. Vereinfachen der Doppelbrüche.

Unterscheide zunächst den Hauptzähler (die zu dividierende Zahl) und den Hauptnenner (die dividierende Zahl).

Beispiel. $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}$; Hauptzähler $\frac{5}{6}$, Hauptnenner $\frac{7}{8}$.
Specialnenner: 6 und 8,
Specialzähler: 5 und 7.

Die gemischten Zahlen richte ein und setze die Specialnenner aus dem Hauptzähler in den Hauptnenner (aus dem obern Teil in den untern) und aus dem Hauptnenner in den Hauptzähler (von unten nach oben). Ganze Zahlen und Specialzähler behalten ihre Stellung.

Beispiel. $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}=\frac{5\cdot 8}{6\cdot 7}=\frac{20}{21}.$

Beweis. $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{8}}$ mit 6 erweitert $=\frac{\frac{5}{6}\cdot 6}{6\cdot\frac{7}{8}}=\frac{5}{6\cdot\frac{7}{8}}$, noch mit 8 erweitert $=\frac{5\cdot 8}{6\cdot\frac{7}{8}\cdot 8}=\frac{5\cdot 8}{6\cdot 7}$!

Beispiele.

$$\frac{\frac{5}{9}}{20}=\frac{5}{9\cdot 20}=\frac{1}{36};$$

$$\frac{12}{\frac{8}{9}}=\frac{12\cdot 9}{8}=13\tfrac{1}{2};$$

$$\frac{3}{4\frac{1}{2}}=\frac{3\cdot 2}{9}=\frac{2}{3};$$

$$\frac{\frac{5}{8}\cdot 6}{13\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{15}\cdot 20}=\frac{\cancel{5}\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{4}\cdot\overset{3}{\cancel{15}}}{8\cdot\underset{11}{\cancel{55}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{20}}=\frac{9}{88};$$

$$\frac{4\frac{1}{5}}{2\cdot 4\frac{2}{3}}=\frac{\overset{3}{\cancel{21}}\cdot 3}{5\cdot 2\cdot\underset{2}{\cancel{14}}}=\frac{9}{20}.$$

Enthält der Doppelbruch Summen und Differenzen,

z. B. $\dfrac{1\frac{3}{5}+\dfrac{2}{3}}{2\frac{1}{8}-\dfrac{5}{6}}$, so rechne entweder $\dfrac{2\frac{4}{15}}{1\frac{7}{24}}=\dfrac{34\cdot 24}{15\cdot 31}=1\frac{117}{155}$,

oder erweitere mit dem Generalnenner der Specialnenner, daher:

$$=\frac{\left(1\frac{3}{5}+\dfrac{2}{3}\right)\cdot 120}{\left(2\frac{1}{8}-\dfrac{5}{6}\right)\cdot 120}=\frac{192+80}{255-100}=\frac{272}{155}=1\tfrac{117}{155}.$$

Welches ist der reciproke Wert von $1\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}$?

Entweder $\dfrac{1}{1\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}}$ erweitert mit $12=\dfrac{12}{20+21}=\dfrac{12}{41}$, oder $1\frac{2}{3}+1\frac{3}{4}=3\frac{5}{12}=\dfrac{41}{12}$ und hiervon ist der reciproke Wert $\dfrac{12}{41}$, wie vorher.

§. 38. Decimalbrüche.

1. Nach §. 19, 1 gilt jede Einheit irgend einer Ordnung einer Decimalzahl 10 Einheiten der nächstniedern Ordnung. Man erhält daher umgekehrt den Wert einer Einheit, wenn man die Einheit der nächsthöheren Ordnung durch 10 dividiert. Auf die 1000 geltende Einheit mufs daher nach rechts hin

die Einheit mit dem Werte $1000:10=100$,
auf diese $100:10=10$,
alsdann $10:10=1$,

$$1:10=\frac{1}{10},$$
$$\frac{1}{10}:10=\frac{1}{100},$$
$$\frac{1}{100}:10=\frac{1}{1000}$$

u. s. w. folgen.

Befänden sich demnach die 8 Einheiten der nachstehenden dekadischen Zahl in der Ordnung der Einer (Einheit $=1$):

2 4 6 8 3 5 7 9, so würden die Einheiten der betreffenden Ordnungen $1000\;\;100\;\;10\;\;1\;\;\frac{1}{10}\;\;\frac{1}{100}\;\;\frac{1}{1000}\;\;\frac{1}{10000}$ gelten und die Zahl hätte nach §. 19 den Wert:

$$2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} + 7 \cdot \frac{1}{1000} + 9 \cdot \frac{1}{10000}$$

$$= 2000 + 400 + 60 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{9}{10000}$$

= 2468 + 3 Zehntel + 5 Hundertel + 7 Tausendtel + 9 Zehntausendtel.

Bei jeder Decimalzahl würden also auf die Einer nach rechts hin die

Zehntel, Hundertel, Tausendtel, Zehntausendtel, Hunderttausendtel, Milliontel, Zehnmilliontel, Hundertmilliontel, Tausendmilliontel, Zehntausendmilliontel, Hundertausendmilliontel, Billiontel, Zehnbilliontel

u. s. w. folgen.

Trennt man die Einer von den Zehnteln durch irgend ein „Decimalzeichen", z. B. ein Komma, so würde die vorstehende Zahl

2468,3579

zu schreiben sein.

In gleicher Weise bedeutet $65{,}73 = 65 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100}$:

$$2{,}00047 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot \frac{1}{1000} + 4 \cdot \frac{1}{10000} + 7 \cdot \frac{1}{100000}$$

$$= 2 + 0 + 0 + 0 + \frac{4}{10000} + \frac{7}{100000}$$

= 2 + keine Zehntel + keine Hundertel + keine Tausendtel + 4 Zehntausendtel + 7 Hunderttausendtel.

$0{,}5 = 0$ (Einer) $+ 5 \cdot \frac{1}{10}$ oder keine Ganzen + 5 Zehntel.

Anmerkung. Da für jede Ordnung der Zahl 1883 oder 68,7319 oder 0,5 dieser Entwickelung zufolge der im Eingange des §. 19 ausgesprochene Satz gilt, so sind alle diese Zahlen Decimalzahlen.

2. Vorstehende Entwickelung führt zu der Definition:

Decimalbruch (dekadischer Systembruch) ist der Inbegriff derjenigen Stellen einer Decimalzahl, deren Einheiten kleiner als die Einheit sind. [Falsch: Der Nenner eine Potenz von 10.]

In den vorstehenden Beispielen bilden also die rechts vom Komma befindlichen Stellen den Decimalbruch. 6,73 hat einen

2stelligen, 13,00719 einen 5stelligen Decimalbruch, dessen „Decimalstellen“ (oder „Decimalen“) 0, 0, 7, 1, 9 sind.

Statt 65,71 schreiben Manche auch 65.71 oder 65·71 oder $65,_{71}$ oder $65._{71}$ oder 65_{71}.

3. Die dekadische Zahl 2468,3579 hatte also den Wert

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 8 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{10^2} + 7 \cdot \frac{1}{10^3} + 9 \cdot \frac{1}{10^4}.$$

Die dodekadische Zahl 483,7*e*65 (s. §. 21) ist daher gleichbedeutend mit der nachstehenden Decimalzahl:

$$4 \cdot 12^2 + 8 \cdot 12 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{12^2} + 6 \cdot \frac{1}{12^3} + 5 \cdot \frac{1}{12^4}$$

$$= 4 \cdot 144 + 96 + 3 + 7 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{144} + 6 \cdot \frac{1}{1728} + 5 \cdot \frac{1}{20736}$$

$$= 675 + \frac{7}{12} + \frac{11}{144} + \frac{6}{1728} + \frac{5}{20736}$$

$$= 675\tfrac{13757}{20736}.$$

7*e*65 ist hier der (4stellige) dodekadische Systembruch.

4. Da 10 Einheiten der 4. Decimalstelle = 1 Einheit der 3. sind, so ist

1 Einheit der 4. Decimalstelle $= \frac{1}{10}$ Einheit der 3.,

6 Einheiten „ 4. „ $= \frac{6}{10}$ „ „ 3.

In der Decimalzahl 0,62954
abc

gelten daher die 4 Einheiten der Ordnung c so viel als $\frac{4}{10}$ Einheiten der Ordnung b, die 5 Einheiten der Ordnung b so viel als $\frac{5}{10}$ Einheiten (oder $\frac{1}{2}$ Einheit) der Ordnung a.

5. Lesen der Decimalbrüche.

In Satz 1 wurde 2468,3579 zunächst auf

$$2468 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{9}{10000}$$

zurückgeführt. Erweitert man den 1. Bruch mit 1000, den 2. mit 100, den 3. mit 10, so erhält man:

$$2468 + \frac{3000}{10000} + \frac{500}{10000} + \frac{70}{10000} + \frac{9}{10000}$$
$$= 2468\tfrac{3579}{10000}.$$

Den Decimalbruch 2468,3579 liest man daher nicht 2468, 3 Zehntel, 5 Hundertel u. s. w. (s. 1. Satz), sondern einfacher:

2468 Ganze 3579 Zehntausendtel,
oder 2468 Komma 3579 Zehntausendtel.

Allgemeine Regel:

Um einen Decimalbruch zu lesen, betrachtet man die Stellen des Decimalbruchs als ganzzahligen Zähler eines gemeinen Bruchs, dem man als Nenner eine Potenz von 10 mit so viel Nullen giebt, als der Decimalbruch Stellen hat.

Daher 7,62 gelesen: 7 Ganze $\frac{62}{100}$ oder 7 Komma $\frac{62}{100}$;

0,000197 „ 0 „ $\frac{197}{1000000}$;

0,9 „ 0 Komma 9 Zehntel.

Um nicht erst den zu lesenden Nenner eines Decimalbruches bestimmen und aussprechen zu müssen, liest man z. B.:

3,14159265: 3 Komma, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5;
oder 0,0041393 : 0 „ 0, 0, 4, 1, 3, 9, 3.

6. Schreiben der Decimalbrüche.

Kehrt man die vorstehenden Sätze um, so ergiebt sich, dafs man

für $7\frac{62}{100}$ den Decimalbruch 7,62,

für $\frac{197}{1000000}$ „ „ 0,000197

schreiben kann. Im letztern Falle mufs selbstverständlich „0 Ganze" hinzugefügt werden, um hierdurch den Rang der nachfolgenden Stellen zu bestimmen.

Allgemein: Ist der Nenner des gemeinen Bruches eine Potenz von 10, so kann man statt dessen einen Decimalbruch schreiben, indem man im Zähler so viel (von rechts nach links abzuzählende) Stellen für den Decimalbruch benutzt, als der Nenner Nullen hat. Sollte der Zähler nicht so viel Stellen haben, so sind sie durch Nullen zu ergänzen.

Daher $\frac{13567}{100}$? Da der Nenner 2 Nullen hat, so sind die 2 letzten Stellen des Zählers als Decimalbruch zu betrachten

$= 135,67.$

$\frac{89}{10000000}$? Der Nenner hat 7 Nullen, folglich mufs der Decimalbruch 7stellig werden und vor 89 sind mithin noch 5 Nullen zu ergänzen $= 0,0000089$.

$29\frac{37}{1000}$? Der Decimalbruch erhält 3 Stellen, mithin ist vor 37 eine Null zu setzen $= 29,037$.

Folglich ist auch umgekehrt:

$$135{,}67 = \frac{13567}{100};\ 8{,}4 = \frac{84}{10}.$$

7. Der Wert eines Decimalbruchs wird nicht geändert, wenn man am Ende desselben die Nullen wegläſst oder beliebig viele Nullen hinzufügt; denn 17,500 = 17,5, weil der gegebene Decimalbruch keine Hundertel, keine Tausendtel enthält.

Bei Resultaten wird man diese ungültigen Nullen in der Regel weglassen und z. B. statt 19,75000 ℳ nur 19,75 ℳ schreiben.

Ist umgekehrt 4,5 in einen Decimalbruch von mehr Stellen zu verwandeln, so könnte man demnach

4,50 oder 4,500 oder 4,5000000 u. s. w.

schreiben.

Die ganze Zahl 17 kann mithin auch 17,0 oder 17,00 u. s. w. geschrieben werden.

Dennoch läſst man in gewissen Fällen (s. §. 40, 3) die zuletztstehenden Nullen des Decimalbruches nicht weg.

§. 39. Addition mit Decimalbrüchen.

Da nur gleichartige Gröſsen addiert werden können (§. 7, 8), also nur Einer zu Einern, Zehntel zu Zehnteln u. s. w., so sind die Kommata aller Summanden unter einander zu setzen.

Beispiel. $5{,}628 + 197{,}94564 + 0{,}8877 + 85 + 9{,}29 = ?$

```
    5,628
  197,94564
    0,8877
   85
    9,29
 ------------
 = 298,75134.
```

Die Addition ergab hier in den Zehnteln 27 Einheiten. Da nun

10 Zehntel = 1 Einer,
20 „ = 2 „

so sind 27 Zehntel = 2 Einer + 7 Zehntel. Folglich sind in die Stelle der Zehntel der Summe 7 Einheiten zu setzen, die 2 Einer aber mit den 26 Einern der folgenden Stelle zu vereinigen.

§. 40. Abbrechen der Decimalbrüche.

1. §. 32, 8 zufolge ist für $670\frac{3}{10}$, d. i. für 670,3, die Zahl 670, und für $670\frac{8}{10}$, d. i. für 670,8, die Zahl 671 zu setzen, wenn die Brüche abgeworfen werden sollen und der entstehende Fehler möglichst klein sein soll. Hieraus folgt nun, daſs man auch für 0,6703 nur 0,670 und für 0,6708: 0,671 setzen muſs, wenn der Decimal-

bruch nur 3 Decimalstellen erhalten soll. Ist daher ein Decimalbruch auf eine beschränktere Anzahl von Stellen zu benutzen, so hat man nach folgender Regel zu verfahren:

Ist die erste der weggelassenen Stellen kleiner als 5, so sind die beibehaltenen Stellen unverändert zu lassen. Ist dagegen die erste der weggelassenen Stellen 5 oder gröſser als 5, so ist die letzte der beibehaltenen Stellen um eine Einheit zu vermehren.

Es sei z. B. 0,71468 auf 2 Stellen zu benutzen. Da 4, die Einheiten der ersten weggelassenen Stelle, kleiner als 5, so sind die beizubehaltenden Stellen unverändert zu lassen, also 0,71 zu schreiben. (71,468 liegt der Zahl 71 näher als der Zahl 72.)

Ist für 0,01436029 ein 4stelliger Decimalbruch zu setzen, so ist 0,0143 in der letzten Stelle um 1 Einheit zu erhöhen, weil 6, die Einheiten der ersten weggelassenen Stelle, gröſser als 5, und folglich ist 0,0144 zu setzen. (143,6029 liegt der Zahl 144 näher, als der Zahl 143).

0,239175 auf 5 Stellen = 0,23918;
16,51958 „ 3 „ = 16,520; denn
16,519
0,001 addiert:
16,520.

399,99996197 auf 4 Stellen abgebrochen = 400,0000.
Denn 399,9999~~6197~~
0,0001 addiert:
400,0000.

Sind für 18,5 und 236,4913 nur ganze Zahlen zu schreiben, so hat man 19 und 236 zu setzen.

Sollen in der ganzen Zahl 835829 nur die Tausende beibehalten werden, so ist 836000 zu setzen, denn 836000 liegt der gegebenen Zahl näher, als 835000.

2. Der abgebrochene Decimalbruch 4,8197 kann eben so wohl aus 4,819650027 . . ., als aus 4,819749996 . . . entstanden sein. Da nun 4,8197 fast $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Decimalstelle gröſser als der erste dieser beiden 9stelligen Decimalbrüche (§. 38, 4) und fast genau $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Stelle kleiner als der zweite der 9stelligen Decimalbrüche, so ergiebt sich hieraus, daſs die letzte Stelle eines jeden abgebrochenen Decimalbruches nahezu $\frac{1}{2}$ Einheit derselben zu groſs oder zu klein sein kann.

3. Es ist $\sqrt[3]{930} = 9{,}761000076\ldots$. Wäre nun $\sqrt[3]{930}$ auf 6 Decimalstellen zu berechnen, so würde man mithin 9,761000

gefunden haben. In diesem Falle läfst man die Nullen am Ende des Decimalbruches **nicht** weg, sondern schreibt $\sqrt[3]{930} = 9{,}761000$, um damit anzudeuten, dafs das Resultat auf 6 Stellen richtig berechnet worden ist.

$\sqrt[3]{930} = 9{,}761$ würde bedeuten, dafs das Resultat nur auf 3 Stellen berechnet und abgebrochen worden ist und es würde unbestimmt bleiben, wie die (3.) 4, 5., ... Decimalstelle lauten.

Hat man also einen Decimalbruch auf eine gewisse Anzahl von Decimalstellen berechnet, die richtig abgebrochen sich auf Nullen endigen oder sogar nur aus Nullen bestehen, so läfst man die Nullen nicht weg, wenn der Decimalbruch bei Berechnung einer gröfsern Anzahl von Decimalstellen einen andern Wert erhalten würde.

§. 41. Subtraktion mit Decimalbrüchen.

Hier gelten dieselben Regeln wie in der Addition; daher sind die Kommata untereinander zu setzen u. s. w.

1. Beispiel. 15,60012 — 9,785 = ?

```
 15,60012              Gedacht:  15,60012
 — 9,785                         — 9,78500.
 ---------
  5,81512
```

2. Beispiel. 365 — 0,7654?

```
 365                   Gedacht:  365,0000
   0,7654                          0,7654.
 ---------
 364,2346.
```

3. Beispiel. 217,03 — 9,182736?

```
 217,03                Gedacht:  217,030000.
   9,182736
 -----------
 207,847264.
```

Bei der Addition und Subtraktion von vielen Zahlen ist auch hier die dekadische Ergänzung (s. §. 28, E, 5) von Vorteil. Man setzt alsdann das Zeichen △ unmittelbar vor die erste Einheiten enthaltende Stelle.

Beispiel. 3,76158 — 0,087254?

```
   3, 7 6 1 5 8
 + 0,△1 2 7 4 6
 ----------------
   3, 6 7 4 3 2 6.
```

Beweis.

$$\begin{aligned}3{,}76158 - 0{,}087254 &= 3{,}76158 + \underbrace{0{,}1 - 0{,}087254} - 0{,}1\\ &= 3{,}76158 + \qquad 0{,}012746 - 0{,}1\\ &= 3{,}76158 + 0{,}012746 \text{ vermindert um } 1 \text{ Zehntel}\\ &= 3{,}76158 + 0{,}\triangle 12746.\end{aligned}$$

2. Beispiel.

$143{,}792 - 97{,}285 - 0{,}99736 + 4{,}8732 - 0{,}0084126 - 0{,}752369 = ?$

$$\begin{array}{r}143{,}792\\ \triangle 02{,}715\\ \triangle{,}00264\\ 4{,}8732\\ 0{,}0\triangle 15874\\ \triangle{,}247631\\ \hline = 49{,}6220584.\end{array}$$

§. 42. Multiplication mit Decimalbrüchen.

1. Der Multiplicator eine Potenz von 10 (also 10 oder 100 oder 1000 u. s. w.).

Man rückt das Komma im Multiplicand so viel Stellen nach rechts, als der Multiplicator Nullen hat.

Beispiele.

$45{,}13046 \cdot 100 = ?$ Das Komma ist 2 Stellen nach rechts zu rücken, weil 100 zwei Nullen hat. Daher $= 4513{,}046$.

$$0{,}0987 \cdot 1000 = 0098{,}7 = 98{,}7.$$

$$0{,}13 \cdot 10000 = 0{,}1300 \cdot 10000 = 01300, = 1300.$$

Beweis. Da $10 \cdot 1$ Einer = 1 Zehner,
$10 \cdot 5$ Einer = 5 Zehner,
$10 \cdot 1$ Zehntel = 1 Einer u. s. w.,

so werden bei der Multiplication mit 10 die Einer zu Zehnern, die Zehntel zu Einern u. s. w.

Da ferner $100 \cdot 1$ Einer = 1 Hunderter,
$100 \cdot 1$ Zehntel = $10 \cdot (10 \cdot 1$ Zehntel$) = 10 \cdot 1$ Einer
= 1 Zehner u. s. w.,

so werden bei der Multiplication mit 100 die Einer zu Hunderten u. s. w.

Soll 7,34 in Hundertel verwandelt werden, so kann dies unmittelbar nach §. 38, 6 oder auch durch Erweitern des Bruches $\frac{7{,}34}{1}$ mit 100 geschehen und man erhält $\frac{734}{100}$.

Eben so $\frac{18{,}5}{13} = \frac{185}{10 \cdot 13}$; $\frac{7}{136{,}14} = \frac{7 \cdot 100}{13614}$.

2. Multiplication mit Decimalbrüchen.

Man multipliciert ohne Rücksicht auf das Komma und giebt dem erhaltenen Produkt so viel von rechts nach links abzuzählende Decimalstellen, als die Faktoren zusammengenommen haben.

1. Beispiel. $0{,}173 \cdot 0{,}08$?

Multipliciere $173 \cdot 8 = 1384$.

Da die gegebenen Faktoren $3 + 2 = 5$ Decimalstellen haben, so müssen die Stellen 1384 die letzten Stellen eines 5stelligen Decimalbruchs werden. Folglich

$$= 0{,}01384.$$

Beweis.

$$0{,}173 \cdot 0{,}08 = \frac{173}{1000} \cdot \frac{8}{100} = \frac{173 \cdot 8}{100000} = \frac{1384}{100000} = 0{,}01384$$

(s. §. 38, 6).

2. Beispiel. $2316 \cdot 0{,}000748$?

$$\begin{array}{r} 2316 \cdot 748 \\ \hline 16212 \\ 9264 \\ 18528 \\ \hline 1732368. \end{array}$$

Die gegebenen Faktoren haben zusammen $0 + 6 = 6$ Decimalstellen, folglich sind die 6 letzten Stellen des erhaltenen Produkts zum Decimalbruch zu machen:

$$= 1{,}732368.$$

3. Beispiel. $0{,}5619 \cdot 0{,}041 \cdot 0{,}05$?

Multipliciere $= 5619 \cdot 41 \cdot 5 = 5619 \cdot 205 = 1151895$.

Die Faktoren hatten $4 + 3 + 2 = 9$ Decimalstellen. Daher:

$$= 0{,}001151895.$$

3. Multiplication mit einer runden Zahl.

Man multipliciere zuerst mit der in der runden Zahl enthaltenen Potenz von 10, alsdann mit dem andern Faktor.

Beispiel. $0{,}01629 \cdot 4300 = 0{,}01629 \cdot 100 \cdot 43$?

$$\begin{array}{r} = 1{,}629 \cdot 43 \\ \hline 4\,887 \\ 65\,16 \\ \hline = 70{,}047 \end{array} \quad \begin{array}{l} (3 + 0 = 3 \text{ Decimalstellen}) \\ \\ \\ (3 \text{ Decimalstellen}). \end{array}$$

4. Abgekürzte Multiplication.

Oft will man nur die einflufsreichsten, also höchsten Stellen des Produkts kennen lernen, die letzten (oft unsichern) Stellen aber unberücksichtigt lassen. Um nun jene durch eine abgekürzte Rechnung allein zu erhalten, multipliciert man zuerst den Multiplicand mit der höchsten Stelle des Multiplicator. Anstatt aber

später die aus dem Multiplicand und den einzelnen Stellen des Multiplicator erhaltenen Partialprodukte nach rechts auszurücken, kann man stets das Produkt aus dem um die letzten Stellen verkürzten Multiplicand und der betreffenden Stelle des Multiplicator so unter das vorhergehende Partialprodukt setzen, dafs die letzten Stellen beider untereinander zu stehen kommen.

1. Beispiel. Wäre $5{,}832768 \cdot 4{,}63$ zu multiplicieren, so würde die Rechnung vollständig lauten:

$$\begin{array}{r} 5{,}832768 \cdot 4{,}63 \\ \hline 23\,331072 \\ 3\,4996608 \\ 17498304 \\ \hline \end{array}$$

Multipliciert man nun beim 2. Partialprodukt nicht $5832768 \cdot 6$, sondern

$$5832768 \cdot 6 = 34996608 = 3499661 \quad (\text{s. §. } 40),$$

beim 3. Partialprodukt nicht $5832768 \cdot 3$, sondern

$$5832768 \cdot 3 = 17498304 = 174983,$$

so hätte man offenbar auch die Partialprodukte in folgender Weise untereinander zu stellen:

$$\begin{array}{rl} 23331072 &= 5832768 \cdot 4 \\ 3499661 &= 5832768 \cdot 6 \\ 174983 &= 5832768 \cdot 3 \\ \hline = 27005716. & \end{array}$$

Zugleich folgt hieraus, dafs man immer zu untersuchen hat, wie viel Einheiten aus der Multiplication der gestrichenen Stellen herüber zu nehmen sind. Es genügt hierbei, von den gestrichenen Stellen immer nur die höchsten (links) zu beachten. Beim 2. Partialprodukt waren hier z. B. $8 \cdot 6 = 48 = 4{,}8 = 5$ Einheiten (s. §. 40) herüber zu nehmen, und das Partialprodukt mufste daher

$$583276 \cdot 6 + 5 = 3499661$$

gesetzt werden.

Die Stellung des Komma im Produkt ergiebt sich aus den noch vollständig multiplicierten Stellen. Hier wurden die Stellen $5{,}832768 \cdot 4$ vollständig multipliciert, dann aber abgebrochen, folglich mufs das Produkt $6 + 0 = 6$ Decimalstellen erhalten. Es ist daher $= 27{,}005716$.

Noch ist zu berücksichtigen, dafs die letzte Stelle des erhaltenen Produkts nicht ganz richtig sein kann. Denn jede letzte Stelle der durch Abbrechen entstandenen Partialprodukte kann einen Fehler von nahezu einer halben Einheit enthalten (s. §. 40, 2). Da vorstehendes Beispiel zwei abgebrochene Partialprodukte enthält, so kann der Fehler $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ Einheit in der letzten Stelle betragen.

2. Beispiel. 0,6580947 · 0,03782548

1 9742841 = 6580947 · 3
4606663 = 6580947 · 7
526476 = 6580947 · 8
13162 = 658094 · 2
3290 = 65809 · 5
263 = 65809 · 4
53 = 658 · 8

24892748.

Vollständig wurde 0,6580947 · 0,03 multipliciert, dann aber abgebrochen, folglich erhält das Produkt 7 + 2 = 9 Decimalstellen = 0,024892748.

Anmerkung. Das Streichen der Stellen nimmt man im Multiplicand selbst vor. Die hier neben den Partialprodukten stehenden Produkte dienten nur zur Erklärung, fallen also in der Praxis weg.

§. 43. **Division mit Decimalbrüchen.**

1. Durch eine Potenz von 10. (Vergl. §. 42, 1).

Man rückt das Komma so viel Stellen nach links als die Potenz von 10 Nullen hat.

Beispiele. 69157,8 : 1000 = 69,1578.
0,093 : 100? Man denke sich: 000,093 : 100 = 0,00093.
43,15 : 100000 (= 000043,15 : 100000) = 0,0004315.

Beweis. Da 1 Einer : 10 = 1 Zehntel (s. §. 19 u. §. 38),
1 Zehntel : 10 = 1 Hundertel,
1 Einer : 100 = 1 „
1 Zehntel : 100 = 1 Tausendtel u. s. w.,
so werden bei der Division durch 10 die Einer zu Zehnteln,
„ „ „ „ 100 „ „ „ Hunderteln
u. s. w.

2. Division eines Decimalbruches durch eine ganze Zahl.

I. Hier ist die Hauptregel der Division zu beachten:
Jede einzelne Stelle des Dividend ist zu dividieren (siehe §. 20, 4, III).

Beispiel. 58,1691195 : 7093 auf 9 Decimalstellen zu berechnen.

Zuerst 5 Zehner : 7093 = 0 Zehner;
58 Einer : 7093 = 0 Einer, daher bis jetzt 00, oder 0,;
581 Zehntel : 7093 = 0 Zehntel, daher 0,0;
5816 Hundertel : 7093 = 0 Hundertel, „ 0,00;
58169 Tausendtel : 7093 = 8 Tausendtel, „ 0,008
u. s. w.

Kürzer: 58 Einer : 7093 = 0 Einer;
581 Zehntel : 7093 = 0 Zehntel u. s. w.

Die vollständige Rechnung ist daher:

```
58,1691195 : 7093 = 0,000820092
56744
 14251
 14186
    651  ⎫
      0  ⎪
   6519  ⎬ in der Praxis wegzulassen!
      0  ⎭
  65195
  63837
  13580.
```

Hier ist dem Reste die Stelle 0 hinzugefügt worden, da man sich den Dividend 58,16911950000 . . . . . denken kann.

Wäre hier das Resultat über die 9. Decimalstelle hinaus berechnet worden, so würde die vorstehende Division in folgender Weise fortgesetzt worden sein:

```
 . . . . . = 0,0008200919 . . .
 13580
  7093
  64870.
```

Da nun jedes Resultat richtig abzubrechen ist und hier auf 9 Decimalstellen verlangt war, so mufste für vorstehenden Quotienten nach §. 40: 0,000820092 gesetzt werden.

Gewöhnlich giebt man für das Abbrechen des Quotient die Regel:

> Die letzte zu berechnende (hier 9.) Stelle ist um 1 zu erhöhen, wenn der folgende Rest gröfser als die Hälfte des Divisor (hier 6487 gröfser als die Hälfte des Divisor 7093) ist, weil dann die folgende Stelle mehr als 5 Einheiten (hier 9 in der 10. Decimalstelle) erhält.

Man müfste hierbei jedoch noch ein Partialprodukt berechnen und subtrahieren. Einfacher ist es, nachzusehen, welcher Quotient aus dem zuletzt zu dividierenden Reste (hier 13580) näher liegt, ob der nächstkleinern oder der nächsthöhern ganzen Zahl. Hier liegt 13580 : 7093 der 2 näher als der 1, folglich mufs bei fortgesetzter Rechnung auf den Quotient 1 offenbar eine Ziffer folgen, die gröfser als 5 ist.

Wollte man das vorstehende Resultat nicht nach §. 40 abbrechen, sondern 0,000820091 . . . — also einen sogenannten unvollendeten Decimalbruch — schreiben, um durch die Punkte anzudeuten, dafs man die folgenden Stellen ohne Rücksicht auf

ihre Gröfse einfach weggelassen habe, so könnte man nicht wissen, ob diese Zahl vollständiger berechnet nicht vielleicht

0,000820091999 . . .

lautet, also $\frac{999}{1000}$ (nahe 1) Einheit der 9. Decimalstelle mehr als 0,000820091. Der Fehler kann also bei dem unvollendeten (nicht abgebrochenen) Decimalbruche nahezu bis zu einer Einheit der letzten Decimalstelle ansteigen, während er (nach §. 40, 2) beim abgebrochenen Decimalbruche noch nicht $\frac{1}{2}$ Einheit beträgt. Hieraus folgt, dafs kein Resultat durch einen unvollendeten Decimalbruch ausgedrückt werden darf, sondern stets richtig abzubrechen ist. Die Punkte am Ende des Decimalbruches können mithin nur in der Theorie (s. §. 44), nicht aber in der Praxis vorkommen. Aus demselben Grunde darf auch keine gegebene Zahl durch einen unvollendeten Decimalbruch ausgedrückt sein.

Die Aufgabe: „Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist 17,32 . . . . . Mtr.; wie grofs ist der Inhalt?" ist daher unmathematisch. Hier müfste entweder 17,32 oder 1733 Meter gegeben sein.

2. Beispiel. 0,05825 : 493 auf 6 Decimalstellen zu berechnen.

Zuerst:	0 Ganze	: 493 = 0 Ganze;	daher	0,
alsdann:	0 Zehntel	: 493 = 0 Zehntel;	„	0,0
	5 Hundertel	: 493 = 0 Hundertel;	„	0,00
	58 Tausendtel	: 493 = 0 Tausendtel;	„	0,000
	582 Zehntausendtel	: 493 = 1 Zehntaus.;	„	0,0001

u. s. w.

Oder: 0,05825 : 493 = 0,000118.

```
 493
 ———
 895
 493
 ————
 4020.
```

Hier liegt 4020 : 493 der 8 näher als der 9, folglich würde auf den Quotient 8 eine Stelle folgen, die kleiner als 5 ist, mithin ist 8 beizubehalten.

3. Beispiel.

```
   6 3  4 1
 4 1 6, 9 2 8 : 7   auf 5 Decimalstellen
 = 5 9, 5 6 1 1 4.
```

4. Beispiel. 3139616 : 41893 auf 4 Decimalstellen.

Man denke sich 3139616,00 . . . . . : 41893 = 74,9437

```
 293251
 ——————
  207106 . . . . . A.
  167572
  ——————
   395340
```

395340 (wiederholt)
377037
183030
167572
154580
125679
289010.

Anmerkung zu A. Auf diese 6 folgt im Dividend das Komma, folglich ist auch nach der hier im Quotient erhaltenen 4 das Komma zu setzen.

5. Beispiel. 8,94761 : 72?

Rechne: 8,94761 : 8
1,11845125 : 9
0,12427236.

II. Auf wie viel Decimalstellen das Resultat zu berechnen ist, hängt von der Natur der Aufgabe ab. Die in Metern auszudrückende Höhe eines Berges würde man nicht auf mehr als 2 Decimalstellen angeben, wenn das Messen von Tausendtelmetern nur mit grofser Unsicherheit ausgeführt werden könnte.

III. Dividiert man 7 Ganze durch 10 oder 2 oder 5, so erhält man Zehntel, aber keine Hundertel, weil die Division von $7 \cdot 10$ (d. i. $7 \cdot 10$ Zehnteln) durch jene Divisoren aufgehen mufs. Eben so geht die Division von 7 Ganzen, d. i. von $7 \cdot 100$ Hundertel durch 100 ($= 10^2$) oder 4 ($= 2^2$) oder 25 ($= 5^2$) spätestens in der 2. Decimalstelle auf, weil $7 \cdot 100$ durch 100, 4 oder 25 teilbar ist. Ist allgemein der Divisor die ganze Zahl 10^n oder 2^n oder 5^n, so mufs die Division stets aufgehen und es können nicht mehr als n neue Stellen hinzukommen.

Beispiel. 0,13 : 16? Da der Divisor 2^4 ist, so können zu den 2 Decimalstellen des Dividend durch die Division nicht mehr als 4 neue Stellen hinzukommen, weil 13 Ganze : 16,

d. i. $13 \cdot 10000$ Zehntausendtel : 16

aufgehen mufs, folglich nur Zehntausendtel, d. i. 4 neue Stellen entstehen können.

IV. Die Division durch eine ganze Zahl, welche die Faktoren 2 und 5 zugleich, sonst aber keine anderen Faktoren enthält, mufs gleichfalls aufgehen; denn stellt man einen solchen Divisor in der Form $10^n \cdot 2^r$ oder $10^n \cdot 5^r$ dar, so giebt die Division durch 10^n zunächst n neue Stellen, und werden diese noch durch 2^r oder 5^r dividiert, so kommen noch r neue Stellen hinzu. Mithin können bei der Division durch $10^n \cdot 2^r$ oder $10^n \cdot 5^r$ nicht mehr als $n + r$ neue Stellen hinzukommen.

Beispiel. 6,7219 : 800, d. i. $6{,}7219 : (10^2 \cdot 2^3)$.

Im Quotient kommen zu den schon vorhandenen 4 Stellen höchstens noch $2 + 3 = 5$ hinzu. Man findet

$$6{,}7219 : 800 = 0{,}008402375,$$

also 9 Decimalstellen.

V. 1 Ganzes = 10 Zehntel = 100 Hundertel u. s. w. kann nie durch die Divisoren 3, 6, 7, 9, 11, 12, ... aufgehen; allgemein:

> Enthält der Divisor aufser 1, 2 und 5 ein Mafs, welches nicht zugleich ein Mafs des Dividend ist, so kann die Division nicht aufgehen.

7,3 : 12 geht nicht auf, weil der Divisor das Mafs 3 enthält, welches kein Mafs des Dividend (73) ist. Man findet

$$7{,}3 : 12 = 0{,}6083333 \,.....$$

VI. Der Quotient aus einer beliebigen Zahl und einem Divisor, der nur wenig kleiner als eine Potenz von 10 ist, kann in folgender Weise sehr einfach berechnet werden:

a. Dividiere den gegebenen Dividend durch diese Potenz von 10.
b. Multipliciere den im Satze a erhaltenen Quotient mit der Differenz aus der Potenz von 10 und dem gegebenen Divisor, und rücke das erhaltene Produkt so viel Stellen nach rechts aus, als diese Potenz von 10 Nullen hat.
c. Den jedesmal erhaltenen Quotient multipliciere stets mit der in b angegebenen Differenz und rücke das erhaltene Produkt auch immer so viele Stellen nach rechts aus, als die Potenz von 10 Nullen hat.

Die Summe der in a, b, c, ... erhaltenen Zahlen giebt den gesuchten Quotient.

1. Beispiel. $\frac{11}{997} = \frac{11}{1000 - 3} = \frac{11}{1000} + \frac{11}{1000^2} \cdot 3 + \,.....$

```
= 0,011                   ⎫
      033                 ⎪
        099               ⎬ addiert
          297             ⎪
            891           ⎪
             2673.....    ⎭
  ---------------------
= 0,0110330992978936.....
```

2. Beispiel. $\frac{6379}{9996} = \frac{6379}{10000 - 4} = \frac{6379}{10000} + \frac{6379}{10000^2} \cdot 4 + \,....$

```
= 0,6379
      25516
          102064
              408256.....
  ---------------------
= 0,6381552621048.....
```

Hier sind die letzten Stellen 256 weggelassen, weil dieselben noch durch die hinzukommenden Zahlen verändert werden.

Beweis. $\frac{a}{10^n - d} = \frac{a}{10^n\left(1 - \frac{d}{10^n}\right)} = \frac{a}{10^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d}{10^n}}$.

Durch Partialdivision wird dies:

$$= \frac{a}{10^n}\left[1 + \frac{d}{10^n} + \frac{d^2}{10^{2n}} + \ldots\right]$$

$$= \frac{a}{10^n} + \left(\frac{a}{10^n} \cdot \frac{d}{10^n}\right) + \left(\frac{a}{10^n} \cdot \frac{d}{10^n}\right) \cdot \frac{d}{10^n} + \ldots$$

3. Division durch eine runde Zahl.

Rücke in beiden Zahlen das Komma gleichviel Stellen nach links und zwar um so viel, dafs die Nullen des Divisors wegfallen.

1. Beispiel. 7,3 : 1300? Das Komma in beiden Zahlen 2 Stellen nach links gerückt (Kürzen durch 100, s. §. 13, 17):

$= 0{,}073 : 13 = 0{,}005615$ (s. 2. Satz).

2. Beispiel. 3 : 410000?

$= 3{,}00\ldots\ldots : 410000$; das Komma 4 Stellen links

$= 0{,}0003_{00} : 41 = 0{,}0000073$.

3. Beispiel.

$\frac{16583{,}1}{790}$? Das Komma 1 Stelle links $= \frac{1658{,}31}{79}$,

oder: $1658{,}31 : 79 = 20{,}991$.

4. Division durch einen Decimalbruch.

Man bilde aus dem Divisor (ohne Rücksicht auf den Dividend) eine ganze Zahl, indem man das Komma nach rechts hinter die letzte Stelle rückt. Hierauf ist auch im Dividend das Komma gleichviel Stellen nach rechts zu rücken.

1. Beispiel. 13,4619 : 0,37 = ?

Das Komma in beiden Zahlen 2 Stellen nach rechts gerückt, um den einfachen Divisor 37 zu bilden:

$1346{,}19 : 37 = 36{,}384$ (nach dem 2. Satze auszuführen).

Beweis.

$$\frac{13{,}4619}{0{,}37} = \frac{13{,}4619 \cdot 100}{0{,}37 \cdot 100} \text{ (s. §. 32, 4)} = \frac{1346{,}19}{37}.$$

2. Beispiel. 239 : 7,0613 = ?

Man denke sich 239,00000 : 7,0613. Das Komma 4 Stellen nach rechts: $2390000{,}0 : 70613 = 33{,}8465$.

Anmerkung. Hier mufs noch einer Probe für die Multiplication und Division gedacht werden, die oft allen andern vorzu-

ziehen ist. Man berechne die Aufgabe mit sehr einfachen Zahlen, die aber nur wenig von den gegebenen abweichen, weil sich alsdann auch das Resultat nur sehr wenig von dem beabsichtigten entfernen kann. Im vorstehenden Beispiele kann das Resultat nur wenig kleiner als $239:7 = 34\frac{1}{7}$, weil der Divisor wenig gröfser als 7 ist. Hätte daher Jemand 338,465 oder 3,38 . . . . . oder eine von 34 sehr abweichende Zahl als Quotient erhalten, so müfste das Resultat offenbar falsch sein. Im 1. Beisp. mufs das Resultat offenbar etwas gröfser als $13:\frac{1}{2} = 26$ und etwas kleiner als

$$13:\frac{1}{3} = 39 \text{ sein.}$$

In dem folgenden (3.) Beispiele mufs das Resultat wenig gröfser als $0{,}00070:13 = 0{,}000053\ldots$ sein. In §. 42, 4, 1. Beisp. ist $5{,}832\ldots\cdot 4{,}63$ offenbar nahe $= 6 \cdot 4\frac{1}{2} = 27$. In der That ist es dort 27,005716.

3. Beispiel. $0{,}0007:12{,}7$? Das Komma 1 Stelle nach rechts $= 0{,}007:127 = 0{,}0000551$ (s. 2. Satz).

4. Beispiel. $\frac{16{,}9 \cdot 0{,}289}{0{,}0034 \cdot 0{,}39}$? Kürze 0,289 und 0,0034 durch 17, ferner 16,9 und 0,39 durch 13. Daher:

$$= \frac{1{,}3 \cdot 0{,}017}{0{,}0002 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}0221}{0{,}000006}$$ (das Komma 6 Stellen nach rechts) $$= \frac{22100}{6} = 3683{,}333.$$

5. Abgekürzte Division.

Um die einflufsreichsten, also höchsten Stellen des Quotient allein zu erhalten, kann man die Rechnung in folgender Weise abkürzen:

> Man verwandelt zunächst den Divisor nach dem 3. und 4. Satze in eine einfache ganze Zahl und dividiert alsdann ganz wie im 2. Satze. Anstatt aber später an den Rest jedesmal die folgende Stelle des Dividend anzuhängen, streicht man dafür stets die letzte Stelle des zuvor benutzten Divisors.

1. Beispiel. $5{,}38761\,7:0{,}69173 = ?$

```
5 38761,7 :  69173 = 7,78861
4 84211
 545507
 484211
   61296 : 6917(3) . . . . a (s. unten die Anmerk.)
   55338 . . . . b
    5958 : 691(7)(3)
```

5958 : 69173 (wiederholt)
5534 c
424 : 69173
415
9 : 69173

Anmerkung zu a. Für 612960 : 69173; denn der Quotient bleibt derselbe, wenn Dividend und Divisor durch 10 dividiert werden.

Zu b. Hier sind, wie bei der abgekürzten Multiplication, die aus den gestrichenen Stellen herüber zu nehmenden Einheiten zu berücksichtigen; denn

$$69173 \cdot 8 = 553384.$$

Zu c. Denn $69173 \cdot 8 = 553384$.

Die letzte Stelle des Quotient 7,78861 ist unsicher, da die senkrecht unter den 7 Zehnteln des gegebenen Dividend stehenden Einheiten der verschiedenen Reste und Partialprodukte durch das Abbrechen immer unrichtiger werden mufsten. Man schreibt daher auch $7{,}7886_1$.

2. Beispiel. 45,9267 : 130,619.
= 45926,7 : 130619 = 0,351608.
391857
67410 : 130619
65310 (für 653095)
2100 : 130619
1306
794 : 1306
784
10 : 1306
0
10 : 1306
10 (für $13 \cdot 8 = 104$)
0

Das Resultat auch $0{,}35160_8$ geschrieben, wegen der unsichern 8.

3. Beispiel. 27,93 : 821,34; dafür:
2793,0 : 82134 = 0,0340054.
246402
328980
328536
444 : 82134

```
444 : 82134 (wiederholt)
  0
444 : 82134
  0
444 : 8213
411
 33 : 821
```

Diese Divisoren mit durchstrichenen Stellen schreibt man in der Praxis nicht, sondern streicht jedesmal eine Stelle in dem oben links vom Gleichheitszeichen stehenden Divisor 82134.

§. 44. Verwandeln der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

1. 1. Beispiel. $\frac{5}{8} = 5:8$ (s. §. 31, 1) $= 5{,}000:8$ (s. §. 38, 7) $= 0{,}625$ (s. §. 43, 2).

2. Beispiel. $\frac{3}{11} = \frac{3,\overset{3}{0}\,\overset{8}{0}\,\overset{3}{0} : 11}{0,2\,7.}$

Da hier derselbe Rest wiederkehrt, so mufs auch derselbe Quotient wieder erscheinen und es ist

$$\frac{3}{11} = 0{,}27272727\ldots.$$

Die stets nach gleichviel Stellen in derselben Ordnung wiederkehrenden Stellen nennt man Periode. In $\frac{3}{11}$ ist die Periode 27, sie ist also 2stellig.

Anmerkung. Selbstverständlich kommt man dem Werte des gegebenen gemeinen Bruches desto näher, je mehr man Decimalstellen berechnet. So ist z. B. 0,27 von $\frac{3}{11}$ um 0,002727 ....., dagegen 0,2727 von $\frac{3}{11}$ nur um 0,00002727 verschieden.

3. Beispiel. $\frac{2}{3} = \frac{2,\overset{2}{0}\,\overset{2}{0}\,\overset{2}{0}\,\overset{2}{0} : 3}{0,6\,6\,6\,6\ldots.}$

Die Periode ist hier 6, also 1stellig.

4. Beispiel. $\frac{1}{73} = 1{,}00000000 : 73 = 0{,}01369863$

```
 73
 270
 219
  510
  438
  720
```

```
720 (wiederholt)
657
———
 630
 584
 ———
  460
  438
  ———
   220
   219
   ———
     1
```

Da hier derselbe Rest 1 wie bei 1, : 73 erscheint, so mufs nun die Periode, die hier 01369863 ist, von neuem beginnen. Es ist

also $\frac{1}{73} = 0{,}0136986301369863013\ \ldots\ldots$

Anmerkung. Da $\frac{1}{9} = 0{,}11111\ \ldots$ und $\frac{1}{81} = \frac{1}{9} : 9$, so hat man vorstehenden Decimalbruch nur durch 9 zu dividieren, um

$$\frac{1}{81} = 0{,}0123456790123\ \ldots\ldots$$

zu erhalten. Hieraus folgt aber, dafs

$$12345679 \cdot 9 = 111111111 \text{ und mithin z. B.}$$
$$12345679 \cdot 9 \cdot 7 = 777777777, \text{ d. i.}$$
$$12345679 \cdot 63 = 777777777$$

sein mufs. Multipliciert man daher 12345679 mit dem 9fachen einer 1stelligen Zahl, so mufs man eine aus lauter gleichen Ziffern bestehende Zahl als Produkt erhalten, diese Ziffer aber gleich jener 1stelligen Zahl.

2. Enthält ein Decimalbruch von irgend einer Stelle an in allen folgenden Stellen keine Einheiten, so nennt man denselben einen endlichen (vollständigen, vollendeten). So ist 0,625 (s. ob. das 1. Beisp.) ein endlicher Decimalbruch. Geht also die Division zweier ganzen Zahlen auf, so ist der entstandene Decimalbruch ein endlicher.

Tritt jedoch, so viel Stellen man auch vom Decimalbruch berechnet, der Fall nie ein, dafs von einer gewissen Stelle an die folgenden Stellen keine Einheiten enthalten, so nennt man den Decimalbruch einen unendlichen. Die Decimalbrüche des vorstehenden 2., 3. und 4. Beispiels sind daher unendliche.

Werden von einem Decimalbruche von einer gewissen Stelle an die folgenden Stellen einfach weggelassen, ohne die Regeln des Abbrechens anzuwenden, so setzt man einige Punkte hinzu. Einen solchen Decimalbruch, z. B. $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ \ldots\ldots$, nennt man einen unvollendeten oder unvollständigen. (Vergl. §. 43, 2, I!)

Die unendlichen periodischen Decimalbrüche 0,272727 .....; 0,297297297 .....; 0,6666 ..... kürzen Manche durch

$$0,[27];\quad 0,[297];\quad 0,[6]$$

oder auch durch $0,\dot{2}\dot{7};\ 0,\dot{2}9\dot{7};\ 0,\dot{6}$ ab.

3. $47\frac{2}{13}$? Man denke sich $47+\frac{2}{13}$ und verwandle zunächst nur $\frac{2}{13}$ in einen Decimalbruch.

$$\overset{2}{2},000000\overset{2}{}:13$$
$$=0,153846$$

Da hier nach der 6. Decimalstelle derselbe Rest 2 wiederkehrt, so beginnt die Periode von neuem und es ist

$$\frac{2}{13}=0,153846153846\ .....\ \text{oder}$$
$$=0,[153846].$$

Nun ist die gegebene Zahl $=47+0,1538\ .....$
$=47,1538\ .....$

4. $\frac{11}{1300}=11,00:1300=0,110:13$ (s. §. 43, 3)
$=0,0084615384615\ ....[=0,00\dot{8}4615\dot{3}]$.

Die Periode 846153 beginnt hier nicht mit dem Komma, sondern erst mit der 3. Decimalstelle. Ein solcher Decimalbruch wird ein unreinperiodischer (unterbrochenperiodischer, gemischtperiodischer) genannt. Die ersten Stellen des Decimalbruchs, welche nicht zur Periode gehören und derselben vorausgehen (hier 00) nennt man Vorziffern oder vorperiodische Stellen.

Die Decimalbrüche, bei welchen die Periode mit dem Komma beginnt (s. die Beisp. im 1. Satze), nennt man reinperiodische.

2. Beispiel. $\frac{201}{296}=0,679054054\ .....$

Hier ist die Periode 054, die Vorziffern sind 679.

3. Beispiel. $\frac{163}{328}=0,496951219512195\ .....$

Um bei einem unvollendeten Decimalbruche, wie dem vorstehenden, die Periode zu bestimmen, gehe man von der zuletzt angegebenen Stelle rückwärts. Die Stelle, welche zuerst von den regelmäſsig wiederkehrenden abweicht, ist die letzte der Vorziffern und die Periode beginnt rechts von derselben.

Im vorstehenden Decimalbruche sind die Ziffern von rechts her: 5, 9, 1, 2, 1 — 5, 9, 1, 2, 1 — 5, 9.

Es folgt nun die abweichende Stelle 6, folglich sind 496 die Vorziffern und die auf dieselben folgenden Stellen 95121 bilden die Periode (nicht die zuletzt stehenden Stellen 12195).

5. Ist im Nenner des gegebenen gemeinen Bruches eine Potenz von 5 enthalten, so erleichtert man sich das Verwandeln in einen Decimalbruch durch Erweitern jenes Bruches.

1. Beispiel. $\frac{14}{25}$ mit 4 erweitert $= \frac{56}{100} = 0{,}56.$

2. Beispiel.

$\frac{1343}{5125}$ mit 8 erweitert $= \frac{10744}{41000} = \frac{10{,}744}{41} = 0{,}26 \ldots\ldots$

Anmerkung. Man merke sich behufs kürzerer Division von den am häufigsten auftretenden gemeinen Brüchen den gleichbedeutenden Decimalbruch.

Beispiele. $\frac{1}{4} = 0{,}25;\quad \frac{3}{4} = 0{,}75;\quad \frac{1}{8} = 0{,}125;$

$\frac{3}{8} = 0{,}375;\quad \frac{5}{8} = 0{,}625;\quad \frac{7}{8} = 0{,}875.$

Ist nun 0,717 : 8 zu dividieren, so findet man zunächst:

$$\frac{0{,}717^{5} : 8}{0{,}089}$$

Da nun noch 5 : 8 zu dividieren ist, so mufs wegen

$\frac{5}{8} = 0{,}625$ der vollständige Quotient

0,089625 lauten.

6. Um eine Reihe von gemeinen Brüchen zu berechnen, deren Nenner fortlaufende Potenzen einer bestimmten Zahl zeigen, berechne man zunächst die aus diesen Potenzen allein gebildeten Quotienten und zwar jeden derselben unmittelbar aus dem vorhergehenden.

1. Beispiel.

$$x = \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} + \frac{1}{11 \cdot 5^{11}} + \ldots\ldots$$

Man berechne zunächst $\frac{1}{5}, \frac{1}{5^3}, \frac{1}{5^5}, \frac{1}{5^7}, \ldots.$ und zwar

$$\frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$\frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \cdot 5^2} = \frac{1}{5} : 5^2 = 0{,}2 : 25 = 0{,}2 \cdot 4 : 100 = 0{,}8 : 100$$
$$= 0{,}008. \qquad \text{A.}$$

$$\frac{1}{5^5} = \frac{1}{5^3} : 5^2 = 0{,}008 : 25 = 0{,}008 \cdot 4 : 100 = 0{,}032 : 100$$
$$= 0{,}00032. \quad \text{B.}$$

$$\frac{1}{5^7} = 0{,}00032 \cdot 4 : 100 = 0{,}0000128. \quad \text{C.}$$

$$\frac{1}{5^9} = 0{,}0000128 \cdot 4 : 100 = 0{,}000000512. \quad \text{D.}$$

$$\frac{1}{5^{11}} = 0{,}000000512 \cdot 4 : 100 = 0{,}00000002048. \quad \text{E.}$$

Nun ist: $\frac{1}{5} = 0{,}2$

A durch 3 div. $\frac{1}{3 \cdot 5^3} = 0{,}0026666667$

B „ 5 „ $\frac{1}{5 \cdot 5^5} = 0{,}000064$

C „ 7 „ $\frac{1}{7 \cdot 5^7} = 0{,}0000018286$

D „ 9 „ $\frac{1}{9 \cdot 5^9} = 0{,}0000000569$

E „ 11 „ $\frac{1}{11 \cdot 5^{11}} = 0{,}0000000019$ addiert:

$x = 0{,}2027325541.$

2. Beispiel.

$$x = \frac{1}{72} - \frac{1}{2 \cdot 72^2} + \frac{1}{3 \cdot 72^3} - \frac{1}{4 \cdot 72^4} + \frac{1}{5 \cdot 72^5} - \ldots\ldots$$

Zuerst $\frac{1}{72}$?

1,000 (:8
0,125 (:9

$$\frac{1}{72} = 0{,}013888888889.$$

Nun ist $\frac{1}{72^2} = \frac{1}{72} : 72$; daher:

0,013888888889 (:8
0,001736111111 (:9

$$\frac{1}{72^2} = 0{,}000192901235$$ (:8

0,000024112654 (:9

$$\frac{1}{72^3} = 0{,}000002679184$$

Eben so $\frac{1}{72^4} = 0{,}000000037211$

$\frac{1}{72^5} = 0{,}000000000517.$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{72} = 0{,}013888888889$$

$$\frac{1}{3 \cdot 72^3} = \frac{1}{72^3} : 3 = 0{,}000000893061$$

$$\frac{1}{5 \cdot 72^5} = \frac{1}{72^5} : 5 = 0{,}000000000103$$

$$0{,}013889782053. \quad \text{A.}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 72^2} = \frac{1}{72^2} : 2 = 0{,}000096450618$$

$$\frac{1}{4 \cdot 72^4} = \frac{1}{72^4} : 4 = 0{,}000000009303$$

$$0{,}000096459921. \quad \text{B.}$$

A um B vermindert (§. 9, 17, Zus.) giebt:

$$x = 0{,}013793322132.$$

7. Ist der Nenner des gemeinen Bruches eine Zahl, die nur die Faktoren 2 oder 5 enthält, so ist der gleichbedeutende Decimalbruch ein endlicher. (Beweis s. §. 43, 2, III.)

Beispiele. $\frac{11}{25}$, denn $25 = 5 \cdot 5$;

$9\frac{13}{16}$, denn $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;

$\frac{17}{40}$, denn $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

Dagegen $\frac{1}{12}$ unendlicher Decimalbruch, weil $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

8.

$$\frac{4}{7} = \overset{4}{4},\overset{5}{0}\,\overset{1}{0}\,\overset{3}{0}\,\overset{2}{0}\,\overset{6}{0}\,0 : 7$$

$$= 0{,}5\,7\,1\,4\,2\,8\,\ldots.$$

Diese Division — Verwandlung von $\frac{4}{7}$ in einen Decimalbruch — zeigt die Reste 4, 5, 1, 3, 2, 6. Da nun kein Rest gröſser als 6 sein kann und schon alle Reste von 1 bis 6 vorhanden waren, so muſs offenbar der 7. Rest einer der vorhergehenden sein. Hier ist der 7. Rest (aus $60 : 7) = 4$, also dem 1. gleich.

Bei gleichen Resten aber muſs auch der Quotient wieder derselbe sein, folglich müssen sich nach jenen 6 Stellen 571428 des

Quotienten dieselben Ziffern wiederholen. Die Periode kann also nicht mehr als $7-1=6$ Stellen haben.

$$\frac{6}{17}=\overset{6}{6},\overset{9}{0}\,\overset{5}{0}\,0:17$$
$$=0,3\,5\ldots..$$

Die Reste sind hier 6, 9, 5 ..... Da kein Rest gröfser als 16 sein kann, so sind im ungünstigsten Falle die ersten 16 Reste nur die 16 in (scheinbar) beliebiger Ordnung auftretenden Zahlen 1, 2, 3 bis 16. Weil nun der 17. Rest gleichfalls eine der Zahlen 1 bis 16, also einer der früheren Reste und dann auch der Quotient derselbe sein mufs, so folgt daraus, dafs die Periode spätestens mit der 17. Decimalstelle von neuem beginnen mufs und aus nicht mehr als $17-1=16$ Stellen bestehen kann.

Aus diesen Beispielen ergiebt sich der Satz:

Die Periode eines Decimalbruches kann nicht mehr Stellen haben, als der Nenner des gleichbedeutenden gemeinen Bruches Einheiten hat, weniger eine.

$\frac{1}{149}$ kann also eine höchstens 148stellige, $\frac{1}{269}$ eine höchstens 268stellige Periode geben.

9. Erhält man bei der Verwandlung von $\frac{1}{p}$ $\left(\text{z. B. } \frac{1}{37}\right)$ in einen Decimalbruch nach n Stellen wieder den Rest 1, so giebt also $10^n:p$ den Rest 1, d. i. die Division $(10^n-1):p$ geht auf. Da nun $10^1-1=9$, $10^2-1=99$, $10^3-1=999$ u. s. w., so ist 10^n-1 eine aus n Neunen bestehende Zahl. Geht daher die Division einer aus n Neunen bestehenden Zahl durch p auf, so mufs auch der Quotient nach je n Neunen immer wieder derselbe sein, d. h. die Periode beginnt mit dem Komma.

Beispiel. $999:37=27$, folglich:

$$\frac{1}{37}=\overset{1}{1},000\overset{1}{\,}000\overset{1}{\,}:37$$
$$=0,027\,027\ldots..$$

Geht aber $\underset{\smile}{\overset{1}{9}}\,\underset{\smile}{\overset{2}{9}}\,\underset{\smile}{\overset{3}{9}}\ldots..\underset{\smile}{\overset{n}{9}}:p$ auf, so mufs auch $\frac{99\ldots..9}{p}\cdot m$ aufgehen, d. h. die Periode aus $\frac{m}{p}$ $\left(\text{z. B. } \frac{19}{37}\right)$ entstehenden Decimalbruches mufs gleichfalls mit dem Komma beginnen.

10. Da 99 ..... 9 nicht durch 2 und 5 teilbar ist, so gilt der 9. Satz nur dann, wenn 2 und 5 nicht Faktoren des Nenners sind. Enthält daher der Nenner des gemeinen Bruches aufser andern Zahlen entweder die n^{te} Potenz von 2 oder die n^{te} Potenz

von 5, nicht aber Potenzen von 2 und 5 zugleich, so mufs die Periode mit der $n+1^{\text{ten}}$ Decimalstelle beginnen.

1. Beispiel. $\frac{13}{88}$. Hier ist $88 = 2^3 \cdot 11$. Da der Nenner die 3. Potenz von 2 enthält, so beginnt die Periode mit der $3+1^{\text{ten}}$ oder 4. Decimalstelle.

$$\frac{13}{18} = 0{,}1477272\ldots\ldots$$

2. Beispiel. $\frac{7}{75}$. Hier ist $75 = 5^2 \cdot 3$. Der Nenner enthält die 2. Potenz von 5, folglich beginnt die Periode mit der $2+1^{\text{ten}}$ oder 3. Decimalstelle.

$$\frac{7}{75} = 0{,}093333\ldots\ldots$$

Beweis. Es ist $\frac{13}{88} = \frac{13}{11} : 8 = \frac{13:8}{11}$. Nach §. 43, 2, III giebt $13:8$ einen 3stelligen Decimalbruch und jener Quotient ist alsdann $\frac{1{,}625}{11}$. Da nun der in einen Decimalbruch verwandelte Bruch $\frac{1625}{11} = 147\frac{8}{11}$ nach dem 9. Satze eine mit dem Komma beginnende Periode giebt: $147{,}7272\ldots\ldots$, so mufs der Decimalbruch für $\frac{1{,}625}{11} = \frac{1625}{11} : 1000$ nach §. 43, 1 aus jenem $147{,}72\ldots\ldots$ dadurch entstehen, dafs das Komma 3 Stellen nach links gerückt wird, wobei die Periode in die 4. Decimalstelle einrückt.

1. Zusatz. Enthält der Nenner des gemeinen Bruches die r^{te} Potenz von 10, endigt sich derselbe also auf r Nullen, nach deren Beseitigung weiter keine Potenz von 2 oder 5 vorhanden sein soll, so beginnt die Periode gleichfalls in der $(r+1)^{\text{ten}}$ Decimalstelle.

Der Beweis folgt in gleicher Weise aus §. 43, 2, III und §. 43, 1.

Beispiel. $\frac{37}{30000}$. Der Nenner enthält 10^4, folglich beginnt die Periode mit der $4+1^{\text{ten}}$ oder 5. Decimalstelle.

$$\frac{37}{30000} = 0{,}00123333\ldots\ldots$$

2. Zusatz. Enthält der Nenner des gemeinen Bruches die k^{te} Potenz von 10, endigt sich derselbe also auf k Nullen, nach deren Beseitigung aber noch die n^{te} Potenz von 2 oder 5 vorhanden ist, so beginnt die Periode mit der $k+n+1^{\text{ten}}$ Decimalstelle.

1. Beispiel. $\frac{1}{10500}$. Der Nenner enthält zunächst 10^2. Nach

Beseitigung dieser Potenz bleibt $105 = 5 \cdot 21 = 5^1 \cdot 21$. Folglich mufs die Periode mit der

$2 + 1 + 1^{\text{ten}}$ oder 4. Decimalstelle beginnen.

(2: Expon. von 10; 1: Expon. von 5)

2. Beispiel. $\frac{11}{164000}$. Nach Beseitigung der 3. Potenz von 10 bleibt $164 = 2^2 \cdot 41$. Folglich mufs die Periode mit der

$3 + 2 + 1^{\text{ten}}$ oder 6. Decimalstelle beginnen.

(3: Expon. v. 10; 2: Expon. v. 2)

Beweis. Nach dem Hauptsatze beginnt bei 2^n oder 5^n die Periode mit der $n + 1^{\text{ten}}$ Decimalstelle. Wegen der k^{ten} Potenz von 10 aber rückt das Komma noch k Stellen nach links, so dafs nun die Periode mit der $k + n + 1^{\text{ten}}$ Decimalstelle beginnt.

11.

$$\begin{array}{l} {}^{1}\ {}^{10}\ {}^{26}\ {}^{1} \\ 1,0\ 0\ 0 : 37 \\ \hline = 0,0\ 2\ 7 \end{array}$$

Die Periode von $\frac{1}{37}$ ist also 3stellig, weil $10^3 : 37$ denselben Rest 1 giebt, wie $1 : 37$.

Allgemein. Die Periode von $\frac{1}{n}$ ist $k$stellig, wenn $10^k : n$ den Rest 1 giebt, mithin (s. 9. Satz) wenn die aus k Neunen bestehende ganze Zahl $10^n - 1$ durch n teilbar ist, vorausgesetzt, dafs die aus einer geringern Anzahl von Neunen bestehende Zahl nicht schon durch n teilbar ist. So ist 9, d. i. die aus einer 9 bestehende Zahl, durch 3 und 9 teilbar, folglich geben

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right), \quad \frac{1}{9}\left(\frac{2}{9}, \ \frac{4}{9}, \ \frac{5}{9}, \ \frac{7}{9}, \ \frac{8}{9}\right)$$

eine einstellige Periode. 99, die aus 2 Neunen bestehende Zahl, ist $= 3^2 \cdot 11$. Daher ist sie durch die in $(1 + 3 + 9)(1 + 11)$ enthaltenen Zahlen (s. §. 25, 3), d. i. durch 3, 9, 11, 33, 99 teilbar, folglich geben 11^{tel}, 33^{tel}, 99^{tel} eine zweistellige Periode. Hier fallen 3 und 9 weg, da sie schon in 9 aufgehen, also eine Periode haben müssen, die eine geringere Anzahl von Stellen hat.

$999 = 3^3 \cdot 37$. Folglich geben die Nenner 27, 37, 111, 333, 999 eine 3stellige Periode.

$9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$. Folglich 101, 303, 909, 1111, 3333, 9999 mit 4stelliger Periode.

$99999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$.

Aus $(1 + 3 + 9)(1 + 41)(1 + 271)$ ergeben sich 41, 123, 271, 369, 813, 5439, 11111, 33333, 99999 mit 5stelliger Periode.

Auf gleiche Weise findet man aus $10^6 - 1$, $10^7 - 1$, $10^8 - 1$ u. s. w.:

7, 13, 21, 39, 63, 77, 91, 143, 1001, 10101 = 6stell. Per.
239, 717, 2151, 4649 = 7stell. Per.
73, 137, 10001, 1010101 = 8st. Per.
81, 333667 = 9st. Per.
9091 = 10st. Per.
21649, 513239 = 11st. Per.
9901 = 12st. Per.
53, 79, 265371653 = 13st. Per.
909091 = 14st. Per.
31, 93, 2906161 = 15st. Per.
17, 51, 5882353 = 16 „ „
19, 57, 52579 = 18 „ „
3541, 27961 = 20 „ „
43, 129, 1933, 10838689 = 21st. Per.
23, 69, 121, 4093, 8779 = 22 „ „
99990001 = 24st. Per.
859, 1058313049 = 26st. Per.
243, 757, 440334654777631 = 27st. Per.
29, 87, 281, 121499149 = 28st. Per.
211, 241, 287, 2161 = 30st. Per.
353, 449, 641, 1409, 69857 = 32st. Per.
67 = 33st. Per.
103, 4013, 21993833369 = 34st. Per.
71 = 35st. Per.
999999000001 = 36st. Per.
9999000099990001 = 40st. Per.
83 = 41st. Per.
49, 127, 2689, 459691 = 42st. Per.

Nenner	Periode	Nenner	Periode	Nenner	Periode	Nenner	Periode	Nenner	Periode
173	43	61	60	197	98	293	146	223	222
89	44	277	69	199	99	149	148	229	228
47	46	151	75	109	108	167	166	233	232
139	46	157	78	113	112	179	178	257	256
251	50	169	78	227	113	181	180	263	262
107	53	191	95	283	141	193	192	269	268
59	58								

Zusatz. Da die Division oft durch Zerlegen des Divisor bequemer wird, so dividiert man zuerst durch den Faktor, welcher entweder einen endlichen Decimalbruch oder eine Periode von geringer Anzahl Stellen giebt.

1. Beispiel. $\frac{13}{56}$? $\frac{13{,}000 : 8}{1{,}625 : 7}$ u. s. w.

2. Beispiel. $\frac{53}{77}$? $\frac{53{,}0000 \quad : 11}{4{,}8181\dot{8}1 \ldots : 7}$ u. s. w.

12. Aus dem Satze: „Alle in $10^k - 1$ aufgehenden Nenner geben eine (höchstens) $k$stellige Periode“ folgt unmittelbar:

„Alle in $10^{2k} - 1$ aufgehenden Nenner geben eine (höchstens) $2k$stellige Periode.“

Da nun $10^{2k} - 1 = (10^k + 1)(10^k - 1)$, so folgt:

Alle in $10^k + 1$ aufgehenden Nenner geben eine höchstens $2k$stellige Periode.

Beispiele. $10^1 + 1 = 11$, eine höchstens 2stell. Per.
$10^2 + 1 = 101$, „ „ 4 „ „
$10^3 + 1 = 1001$, „ „ 6 „ „

Da nun 7 und 13 in 1001 enthalten sind, so geben diese auch eine 6stell. Per.

$10^4 + 1$ enthält 73 und 137 mit 8stell. Per.

13.

$$\frac{1}{83} = \frac{1{,}\overset{1}{0}\,\overset{10}{0}\,\overset{17}{0}\,\overset{4}{0} : 83}{= 0{,}0\;1\;2}$$

Die Division wäre jetzt mit 400 . . . : 83 fortzusetzen. Da aber 4 . . . : 83 das 4fache von 1 . . . : 83, so müssen die nun folgenden Stellen des Quotient offenbar 4mal so grofs als vorher sein, es mufs also $4 \cdot 012 = 048$ folgen. Aber auch die Reste müssen 4mal so grofs werden und es mufs der bei der 6. Decimalstelle erhaltene Rest 4mal so grofs als der bei der 3. Decimalstelle erhaltene sein, also $= 4 \cdot 4 = 4^2$. Folglich:

$$\frac{1{,}\overset{1}{0}00\,\overset{4}{0}00\,\overset{16}{} : 83}{= 0{,}012\;048}$$

Der neue Quotient $16 : 83$ ist wieder das 4fache des Quotient $4 : 83$ und auch der auf die 9. Decimalstelle folgende Rest offenbar das 4fache des auf die 6. Decimalstelle folgenden, also $= 4^3$.

Daher:
$$\begin{array}{l} \overset{1}{1},\ 0\overset{4}{0}0\ 0\overset{16}{0}0\ 0\overset{64}{0}0 \quad :83 \\ \hline 0,\ 012 \\ \quad\quad 048 \\ \quad\quad\quad 192 \\ \quad\quad\quad\quad 768 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 3072 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 12288 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 49152 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{83} = 0,\ 012\ 048\ 192\ 771084337\ \ldots.$$

Hieraus läfst sich allgemein folgender Satz ableiten:

Ist bei der Verwandlung des Bruches $\frac{1}{n}$ in einen Decimalbruch, vorausgesetzt, dafs n keine Potenz von 2 oder 5 enthält, der Rest nach der n^{ten} Decimalstelle $= r$, so mufs der Rest nach der $2n^{\text{ten}}$ Decimalstelle $= r^2$ (oder $r^2 - V_n$),
„ „ „ „ $3n^{\text{ten}}$ „ $= r^3$ (oder $r^3 - V_n$)
u. s. w. sein; ferner müssen die auf die n ersten Stellen des Decimalbruchs folgenden n Stellen $r$mal so grofs als jene, überhaupt jedesmal die n folgenden Stellen $r$mal so grofs als die vorhergehenden sein.

2. Beispiel. $\frac{1}{31} = \dfrac{\overset{1}{1},0\ \overset{7}{0}\ \overset{8}{0}\ \overset{18}{0}\ \overset{25}{0}\ \overset{2}{0}\ :31}{0,0\ 3\ 2\ 2\ 5\ 8}$

Da hier der Rest 2 ist, so ist der erhaltene 6stellige Quotient und in der Folge jedes Produkt mit 2 zu multiplicieren und stets 6 Stellen nach rechts auszurücken. Daher:

$$\begin{array}{l} 0,032258\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad 064516 \\ \quad\quad\quad\quad\quad 129032 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 258064 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{31} = 0,032258064516129032258 0\ldots.$$

Die Periode ist 15stellig (s. 10. Satz).

3. Beispiel. $\frac{1}{59} = \overset{1}{1},\ 0\ \overset{41}{0}\ \overset{56}{0}\ \overset{29}{0}\ \overset{54}{0}\ \overset{9}{0}\ldots:59$
$= 0,\ 0\ 1\ 6\ 9\ 4\ 9$

Hier ist 16949 mit 9 zu multiplicieren u. s. w., jedes Produkt aber 6 Stellen nach rechts auszurücken. Daher:

$$\begin{array}{l} 0,016949\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad 152541\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad 1372869\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 12355821 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{59} = 0,016949152542372881355\ldots$$

Der Rest bei der 6. Decimalstelle ist 9, folglich ist er bei der 12. Decimalstelle $9^2 = 81$. Da er jedoch nicht gröfser als 58 sein kann, so ist 81 um das entsprechende Vielfache von 59 zu vermindern. Der wirkliche Rest daher $= 81 - 1 \cdot 59 = 22$. Daher der oben hinzugefügte Zusatz $r^2 - V_n$! Der Rest 81 würde auch wirklich geblieben sein, wenn man in der 12. Decimalstelle $1 \cdot 59$ subtrahiert hätte, wie die letzte Stelle der Zahl 152541 anzeigt. Aus dem Endresultate (der Summe jener Partialprodukte) ersieht man jedoch, dafs in der 12. Decimalstelle nicht $1 \cdot 59$, sondern $2 \cdot 59$ zu subtrahieren war. Der Rest für die 18. Decimalstelle ist nun das 9fache des Restes 22 der 12. Decimalstelle, daher $= 198$ und um $3 \cdot 59$ vermindert $= 21$.

Dieses Verfahren, einen gemeinen Bruch kürzer in einen Decimalbruch zu verwandeln, läfst sich auch auf solche Brüche ausdehnen, welche den Zähler 1 nicht haben.

Beispiel. $$\frac{41}{109} = \frac{41{,}000^{16}\,0000000000000^{96}}{0{,}376\;1467889908256}$$

Stöfst man auf einen Rest, der ein Vielfaches eines früheren Restes ist, so mufs auch der Quotient dasselbe Vielfache sein.

Hier kann man daher, weil 96 das 6fache von 16 ist,

$$6 \cdot 1467889908256$$

um 13 Stellen nach rechts ausrücken, dann das 6fache eines jeden schon gebildeten Produkts 13 Stellen ausrücken u. s. w.

14. Verwandelt man $\frac{z}{n}$, wo der Nenner n: Potenzen von 2 und 5 nicht enthält, in einen Decimalbruch und ist der Rest bei der k^{ten} Decimalstelle $= n - z$, so hat die Periode $2k$ Stellen und man erhält die 2. Hälfte der Periode, indem man jede Stelle der 1. Hälfte von 9 abzieht.

1. Beispiel. $\frac{3}{7}$? Die Division $3:7$ ist nach Vorstehendem nur so weit auszuführen, bis ein Rest = Nenner — Zähler, also hier $= 7 - 3 = 4$, ist. Daher:

$$\frac{3{,}^{3}0^{2}\,0^{6}\,0^{4} : 7}{0{,}4\;2\;8}$$

Aus der berechneten 1. Hälfte der Periode ergiebt sich die 2. Hälfte $= 999 - 428 = 571$; daher:

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571 \ldots.$$

Anmerkung. Decimalbrüche, deren Periode diese Eigenschaft zeigen, werden zuweilen „dualistische“ genannt.

2. Beispiel. $\frac{19}{73}$? Die Division ist bis zum Reste

$$73 - 19 = 54$$

auszuführen, daher:

$$\begin{array}{l} \scriptstyle 19\ 44\ 2\ 20\ 54 \\ \underline{19,0\ 0\ 0\ 0\ :73} \\ 0,2\ 6\ 0\ 2 \end{array}$$

Die 2. Hälfte der Periode ist nun $= 9999 - 2602 = 7397$; daher:

$$\frac{19}{73} = 0{,}2602739726027397\ \ldots$$

Beweis. $\frac{z}{n} = \frac{q + \frac{n-z}{n}}{10^k}$; vergleiche $\frac{3}{7} = \frac{428 + \frac{7-3}{7}}{10^3}$!

$$\text{oder } \frac{z}{n} = \frac{q + 1 - \frac{z}{n}}{10^k}.$$

Setzt man hier an die Stelle des auf der rechten Seite befindlichen $\frac{z}{n}$ die ganze rechte Seite (die doch auch $= \frac{z}{n}$ ist), so entsteht:

$$\frac{z}{n} = \frac{q + 1 - \frac{q + 1 - \frac{z}{n}}{10^k}}{10^k}$$

$$= \frac{q + \frac{10^k}{10^k} - \frac{q+1}{10^k} + \frac{\frac{z}{n}}{10^k}}{10^k}$$

$$= \frac{q + \frac{10^k - (q+1) + \frac{z}{n}}{10^k}}{10^k}$$

$$= \frac{q}{10^k} + \frac{10^k - q - 1 + \frac{z}{n}}{10^k \cdot 10^k}$$

$$\frac{z}{n} = \frac{q}{10^k} + \frac{[(10^k - 1) - q] + \frac{z}{n}}{10^{2k}}.$$

Hier stellt nun der Zähler q des 1. Bruches rechts die ersten k Stellen des Decimalbruches vor. Der Zähler des 2. Bruches rechts zeigt, dafs die folgenden k Stellen dadurch entstehen, dafs man eine aus k Neunen bestehende Zahl $(= 10^k - 1)$ um q ver-

mindert. Der Rest nach der $2k^{\text{ten}}$ Decimalstelle aber ist, wie man aus dem letzten $\frac{z}{n}$ ersieht, wirklich wieder der Zähler z des gegebenen gemeinen Bruches, also dem 1. Reste gleich und daher mufs die Periode von neuem beginnen.

Zusatz. Enthält der Nenner p des gemeinen Bruches Potenzen von 2 und 5, so dafs nach dem 10. Satze die Periode erst mit einer spätern Stelle beginnt und ist der dieser Stelle vorausgehende Rest $= r$, so sind auch nur die zwischen diesem Reste r und dem später etwa auftretenden Reste $p - r$ liegenden Stellen von 9 abzuziehen.

Beispiel. $\frac{19}{52}$? Der Nenner enthält 2^2, folglich beginnt die Periode erst nach der 2. Stelle:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; {\scriptstyle 19\;\,34\;\,28} \\ 1\,9,0\,0\;:52 \\ \hline 0,3\,6 \end{array}$$

Jetzt sind nur die zwischen dem letzten Reste 28 und dem später etwa auftretenden Reste $52 - 28 = 24$ liegenden Stellen von 9 abzuziehen.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad {\scriptstyle 24} \\ 19,00000\;:52 \\ \hline 0,36538 \end{array}$$

Der Rest (24) ist jetzt jener vorausbestimmte, folglich lassen sich aus den 3 Stellen 5, 3, 8 die folgenden durch Subtraktion von 9 berechnen $= 4, 6, 1$, und es ist demnach:

$$\frac{19}{52} = 0{,}36538461538461\,\ldots\ldots$$

15. Ist $p > 3$ und giebt $\frac{1}{p}$ eine $n$stellige Periode, so mufs $\frac{a}{p^2}$ eine npstellige Periode geben.

Beispiele.

$\frac{1}{9}$ giebt eine 1stellige Periode, folglich $\frac{1}{81} = \frac{1}{9^2}$ eine $1 \cdot 9 =$ 9stellige Periode.

$\frac{1}{7}$ giebt eine 6stell. Per., folgl. $\frac{1}{49}$ eine $6 \cdot 7 = 42$ stell. Per.

$\frac{1}{11}$ „ „ 2 „ „ „ $\frac{1}{121}$ „ $2 \cdot 11 = 22$ „ „

$\frac{1}{37}$ „ „ 3 „ „ „ $\frac{1}{37^2}$ „ $3 \cdot 37 = 111$ „ „

$\frac{1}{13}$ „ „ 6 „ „ „ $\frac{1}{169}$ „ $6 \cdot 13 = 78$ „ „

Beweis. $\frac{19}{37} = 0{,}513513 \ldots\ldots$; folglich

$$\frac{19}{37^2} = \frac{19}{37} : 37 = \frac{0{,}513 + 0{,}000513 + 0{,}000000513 + \ldots\ldots}{37}$$

$$\text{oder } \frac{19}{37^2} = \frac{0{,}513}{37} + \frac{0{,}000513}{37} + \ldots\ldots;$$

da nun $\frac{a}{37}$, also auch $\frac{0{,}513}{37}$ eine 3stellige Periode giebt, die $\alpha\beta\gamma$ heifsen mag, so ist:

$$\frac{0{,}513}{37} = 0{,}\alpha\beta\gamma\,\alpha\beta\gamma\,\alpha\beta\gamma \ldots\ldots$$

$$\frac{0{,}000513}{27} = 0{,}000\,\alpha\beta\gamma\,\alpha\beta\gamma \ldots\ldots$$

$$\frac{0{,}000000513}{37} = 0{,}000000\,\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

Addiert man diese Decimalbrüche, so erhält man:

in der	1.,	2.	und	3.	Decimalstelle:	$\alpha\beta\gamma$,
„ „	4.,	5.	„	6.	„	$2 \cdot (\alpha\beta\gamma)$,
„ „	7.,	8.	„	9.	„	$3 \cdot (\alpha\beta\gamma)$,
	.	.		.		
	.	.		.		
	.	.		.		
	.	.		.		
„ „	109.,	110.	„	111.	„	$37 \cdot (\alpha\beta\gamma)$,
„ „	112.,	113.	„	114.	„	$38 \cdot (\alpha\beta\gamma)$,
„ „	115.,	116.	„	117.	„	$39 \cdot (\alpha\beta\gamma)$.

Da aber $38\,(\alpha\beta\gamma) = 37\,(\alpha\beta\gamma) + \alpha\beta\gamma$ durch 37 dividiert denselben Rest wie $\alpha\beta\gamma$, $39\,(\alpha\beta\gamma) = 37\,(\alpha\beta\gamma) + 2\,\alpha\beta\gamma$ denselben Rest wie $2\,(\alpha\beta\gamma)$ u. s. w. giebt, so ist die 114. Decimalstelle identisch mit der 3., die 117. identisch mit der 6. u. s. w., oder die Periode hat $3 \cdot 37 = 111$ Stellen.

16. Ist p eine Primzahl und hat $\frac{a}{p}$ eine $n$stellige Periode, so ist $p - 1$ durch n teilbar.

Beispiele.

$\frac{1}{37}$ eine 3stellige Periode, folglich $\frac{37-1}{3}$ teilbar.

$\frac{1}{41}$ „ 5 „ „ „ $\frac{41-1}{5}$ „ .

$\frac{1}{73}$ kann also keine 7stellige Periode geben, weil $73 - 1$, d. i. 72, nicht durch 7 teilbar ist.

$\frac{1}{27}$ eine 3stellige Periode und doch ist 27 — 1, d. i. 26, nicht durch 3 teilbar. Der Grund liegt einfach darin, daſs 27 keine Primzahl ist.

Beweis später.

17. Ist p eine Primzahl und hat $\frac{a}{p}$ eine Periode von einer geraden Anzahl Stellen, so giebt die 1. Hälfte derselben zur 2. addiert eine Zahl, die aus lauter Neunen besteht. (Vergleiche den 14. Satz).

1. Beispiel. $\frac{4}{13} = 0{,}307692307692\ldots$

Die Periode ist 307692 und
$$\begin{array}{r} 307 \\ 692 \\ \hline \text{Summe } 999. \end{array}$$

2. Beispiel. $\frac{38}{73} = 0{,}5204479552044795\ldots$

Die Periode ist 52044795 und
$$\begin{array}{r} 5204 \\ 4795 \\ \hline \text{Summe } 9999. \end{array}$$

Anwendung. Es sei $\frac{7}{17}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Da 17 eine 2stellige Zahl ist, so kann die Periode nicht 1stellig sein. Nach dem 16. Satze aber könnte die Periode nur 2, 4, 8 oder 16stellig sein.

Man findet den 3. Rest nicht = dem 1., folglich ist die Periode nur 4, 8 oder 16stellig.

Aber auch der 5. Rest ist nicht = dem 1., mithin die Periode nur 8 oder 16stellig.

Endlich:
$$\begin{array}{l} \quad\;\; {\scriptstyle 7\;\; 2\;\; 3\;\; 13\;\; 11\;\; 8\;\; 12\;\; 1\;\; 10} \\ \;\; 7{,}0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0 \;:17 \\ \hline 0{,}4\;1\;1\;7\;6\;4\;7\;0 \end{array}$$

Da nun der 9. Rest (10) nicht gleich dem 1. (7) ist, so kann die Periode nur noch 16stellig sein.

Da sie ferner geradzahlig ist, so geben die beiden Hälften der Periode als Summe eine Zahl, die aus lauter Neunen besteht, folglich muſs man auch umgekehrt jede Stelle der 2. Hälfte dadurch erhalten, daſs man die Stellen der 1. Hälfte von 9 abzieht.

Folglich:

$$\frac{7}{17} = 0{,}411764\,70588\,23529411764\ldots$$

Da der 9. Rest $= 10 =$ Nenner — Zähler des gemeinen Bruches $= 17 - 7$, so hätte man hier den gewünschten Decimalbruch auch nach dem 14. Satze erhalten.

18. Aus den vorstehenden Sätzen dieses Paragraphen folgt, dafs jeder gemeine Bruch entweder einen endlichen oder einen periodischen Decimalbruch geben mufs.

§. 45. Verwandeln der Decimalbrüche in gemeine Brüche.

1. Endliche Decimalbrüche.

$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $289,03125 = 289\frac{3125}{100000} = 289\frac{1}{32}$.

Anwendung.

Welche Zahl ist (aufser den Potenzen von 5) in 775 enthalten?

Man denke sich $7,75 = 7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$, folglich 31 enthalten!

Welche Zahl ist in 15875 enthalten? Man denke sich

$$15,875 = 15\frac{7}{8} = \frac{127}{8},$$

folglich 127 enthalten!

Welche Zahl ist in 11375 enthalten? $11,375 = 11\frac{3}{8} = \frac{91}{8}$, folglich 91 oder 7 und 13 enthalten!

2. Periodische Decimalbrüche.

Die Periode setzt man als Zähler des zu suchenden gemeinen Bruches. Der Nenner desselben ist eine Zahl, die aus so viel Neunen besteht, als die Periode Stellen hat.

1. Beispiel. $0,636363\ldots = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$.

2. Beispiel.

$$0,0731707317\ldots = \frac{07317}{99999} = \frac{7317}{99999} = \frac{813}{11111}$$

```
11111 : 813 = 13
 813
 ----
 2981
 2439
 ----
...: 542 (2 entfernt:)
813 : 271 = 3
```

Folglich noch durch 271 gekürzt $= \frac{3}{41}$.

1. Beweis. Es ist $\frac{1}{9} = 0{,}11111$

$$\frac{1}{99} = 0{,}010101 \ldots.$$

$$\frac{1}{999} = 0{,}001001001 \ldots.$$

folglich:

1) $0{,}636363 \ldots. = 63 \cdot 0{,}010101 \ldots. = 63 \cdot \frac{1}{99} = \frac{63}{99};$

2) $0{,}0731707317 \ldots. = 7317 \cdot 0{,}000010000100001 \ldots.$

$$= 7317 \cdot \frac{1}{99999} = \frac{7317}{99999}.$$

2. Beweis. Setzt man $0{,}636363 \ldots. = x$, so ist

$$100\,x = 63{,}636363 \ldots.$$

Da nun $x = 0{,}636363 \ldots.$, so erhält man durch Subtraktion $100\,x - 1 \cdot x = 63;$

$$(100 - 1)\,x = 63;$$

$$99 \cdot x = 63;$$

beide Seiten nach §. 13, 30 durch 99 dividiert:

$$\frac{99 \cdot x}{99} = \frac{63}{99};$$

$$x = \frac{63}{99}.$$

Wenn bei $0{,}0731707317 \ldots. = x$ die Periode 07317 als Ganze erscheinen soll, so ist diese Gleichung mit 100000 zu multiplicieren. Daher:

$$100000\,x = 7317{,}0731707317 \ldots.$$

$$x = 0{,}0731707317 \ldots. \text{ subtr.}$$

$$99999\,x = 7317;$$

durch 99999 dividiert $x = \frac{7317}{99999}.$

1. Anmerkung. Ein anderes Verfahren für einen besondern Fall wird im 4. Satze gelehrt.

2. Anmerkung. Es ist daher $0{,}99999 \ldots. = \frac{9}{9} = 1.$

Zusatz. Kennt man die Faktoren, welche multipliciert eine aus lauter Neunen bestehende Zahl geben, so kann man mittelst des vorstehenden Verfahrens durch Erweitern in sehr einfacher Weise gemeine Brüche in Decimalbrüche verwandeln.

Beispiele. $\frac{7}{11}$ mit 9 erweitert $= \frac{63}{99}$; folglich mufs 63 zur Periode werden und man hat $\frac{7}{11} = 0{,}636363 \ldots.$

$\frac{11}{37}$? Da $37 \cdot 27 = 999$, so ist:

$$\frac{11}{37} = \frac{11 \cdot 27}{37 \cdot 27} = \frac{297}{999} = 0{,}297297297\ldots.$$

3. Unreinperiodische Decimalbrüche.

1. Verfahren. Von der letzten Stelle des gegebenen Decimalbruchs ausgehend setze man die regelmäfsig wiederkehrenden Stellen bis zum Komma fort (ähnlich wie in §. 44, 4), wodurch man einen Decimalbruch mit ununterbrochener Periode erhält, der in den ersten Stellen von den Stellen des gegebenen abweicht. Hierauf suche man die Differenz zwischen dem gegebenen und dem gebildeten reinperiodischen Decimalbruche. Da nun der gegebene Decimalbruch gleich ist dem reinperiodischen Decimalbruche vermehrt oder vermindert um die Differenz, so drücke man die beiden letztern nach dem 2. und 1. Satze durch gemeine Brüche aus und die Summe oder Differenz derselben ist der gegebene Decimalbruch.

1. Beispiel. $0{,}6931818181\ldots. = ?$

Geht man von rechts her mit 1, 8, 1, 8 .... bis zum Komma, so ergiebt sich $0{,}8181818181\ldots.$

Subtrahiert man den gegebenen Decimalbruch von dem letzteren, so ergiebt sich als Differenz 0,125.

Nun ist aber
$$0{,}6931818\ldots. = 0{,}818181\ldots. - 0{,}125$$
$$= \frac{81}{99} - \frac{125}{1000} \text{ (s. 2. u. 1. Satz)}$$
$$= \frac{9}{11} - \frac{1}{8}$$
$$= \frac{61}{88}.$$

2. Beispiel. $0{,}8719512195121951\ldots. = ?$

Geht man mit 1, 5, 9, 1, 2 — 1, 5, 9, 1, 2 — .... von rechts nach links, so findet man:

$$0{,}1219512195121951\ldots.$$

Die Differenz zwischen den beiden Decimalbrüchen ist $= 0{,}75$.

Nun aber ist
$$0{,}8719512\ldots. = 0{,}12195121\ldots. + 0{,}75$$
$$= \frac{12195}{99999} + \frac{75}{100}$$
$$= \frac{5}{41} + \frac{3}{4}$$
$$= \frac{143}{164}.$$

2. Verfahren. Man setze das Komma hinter die Vorziffern, wodurch die gegebene Zahl (nach §. 42, 1) mit einer Potenz von 10 multipliciert worden ist. Mithin mufs die veränderte Zahl, in welcher man statt des reinperiodischen Decimalbruches den gleichbedeutenden gemeinen Bruch setzt, wieder durch jene Potenz dividiert werden.

1. Beispiel. $0{,}8719512195121\ldots = ?$

Die Vorziffern sind 87, die Periode 19512; folglich:

$$= 87{,}1951219512\ldots : 100 = 87\tfrac{19512}{99999} : 100 = 87\tfrac{8}{41} : 100$$

$$= \frac{3575}{41 \cdot 100} = \frac{143}{41 \cdot 4} = \frac{143}{164}.$$

2. Beispiel. $0{,}466666\ldots = 4{,}6666\ldots : 10 = 4\tfrac{6}{9} : 10$

$$= 4\tfrac{2}{3} : 10 = 2\tfrac{1}{3} : 5 = \frac{7}{15}.$$

3. Verfahren. Den Zähler des gemeinen Bruches erhält man, wenn man die ersten Stellen des Decimalbruches bis zum Schlusse der einmaligen Periode um die Vorziffern vermindert. Der Nenner besteht in seinen ersten Stellen aus so viel Neunen, als die Periode Stellen hat (s. 2. Satz), denen eben so viel Nullen anzuhängen sind, als die Anzahl der Vorziffern beträgt.

1. Beispiel. $0{,}\overline{87}\underline{19512}19512\ldots = \dfrac{\overline{87}\underline{19512} - \overline{87}}{\underline{99999}\overline{00}}$

$$= \frac{8719425}{9999900} = \frac{348777}{399996} = \frac{38753}{44444} = \frac{11 \cdot 3523}{4 \cdot 11111}$$

$$= \frac{11 \cdot 13}{4 \cdot 41} = \frac{143}{164}.$$

2. Beispiel. $0{,}46666\ldots = \dfrac{46 - 4}{90} = \dfrac{42}{90} = \dfrac{7}{15}.$

Beweis (s. das 1. Beispiel im 2. Verfahren).

$$87\tfrac{19512}{99999} : 100 = \frac{87\tfrac{19512}{99999}}{100} \text{ erweitert mit } 99999$$

$$= \frac{87 \cdot 99999 + 19512}{99999 \cdot 100} = \frac{87 \cdot (100000 - 1) + 19512}{99999 \cdot 100}$$

$$= \frac{8700000 - 87 + 19512}{99999 \cdot 100} = \frac{8719512 - 87}{9999900}.$$

Anmerkung. Ein 4. Verfahren siehe weiter unten im 5. Satze.

4. Die Periode eines reinperiodischen Decimalbruches mufs (s. §. 44, 8) durchschnittlich öfter geradzahlig als ungeradzahlig sein, in jenem Falle aber, wie aus §. 44, 17 hervorgeht, die daselbst ausgesprochene Eigenschaft zeigen. Mithin wird das nachstehende

Verfahren, einen reinperiodischen Decimalbruch mit geradzahliger Periode in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, oft in Anwendung kommen.

Bei geradzahliger Periode untersuche man, ob die 1. Hälfte derselben zur 2. addiert eine Zahl giebt, die aus lauter Neunen besteht. Ist dies der Fall, so erhält man den Zähler des gemeinen Bruches, indem man die 1. Hälfte der Periode um 1 erhöht, den Nenner aber, indem man die der Hälfte der Periode entsprechende Potenz von 10 um 1 erhöht.

1. Beispiel. 0,7272 .... =? Die Periode ist 72 und es ist

$$\begin{array}{r} 7 \\ 2 \\ \hline 9 \end{array};$$

folglich der gegebene Decimalbruch $= \frac{7+1}{10+1} = \frac{8}{11}$.

2. Beispiel. 0,428571428571 .... =?

Die Periode ist 428571 und

$$\begin{array}{r} 428 \\ 571 \\ \hline 999 \end{array};$$

folglich der gegebene Decimalbruch $= \frac{428+1}{1000+1} = \frac{429}{1001} = \frac{39}{91} = \frac{3}{7}$.

3. Beispiel. 0,808219178082 .... =?

$$\begin{array}{r} 8082 \\ 1917 \\ \hline 9999 \end{array};$$

folglich der gegebene Decimalbruch $= \frac{8082+1}{10000+1} = \frac{8083}{10001}$;

$$\begin{array}{l}
10001 : 8083 = 1 \\
8083 \\
\hline
\ldots . : 1918 \\
8083 : 959 = 9 \\
8631 \\
\hline
\ldots . : 548 \\
959 : 137 = 7 \\
959 \\
\hline
0
\end{array}$$

Daher noch durch 137 gekürzt $= \frac{59}{73}$.

Beweis (s. 2. Beispiel).

$$\frac{428571}{999999} \text{ (s. 2. Satz)} = \frac{428 \cdot 1000 + (999 - 428)}{999 \cdot 1001}$$

$$= \frac{428 \cdot 1000 - 428 \cdot 1 + 999}{999 \cdot 1001} = \frac{428 \cdot (1000 - 1) + 999}{999 \cdot 1001}$$

$$= \frac{428 \cdot 999 + 1 \cdot 999}{999 \cdot 1001} = \frac{(428+1) \cdot 999}{999 \cdot (1000+1)} = \frac{428+1}{1000+1}.$$

5. Einen unreinperiodischen Decimalbruch mit geradzahliger Periode, deren beide Hälften addiert eine aus lauter Neunen bestehende Zahl geben, verwandelt man in folgender Weise in einen gemeinen Bruch:

Der Zähler ergiebt sich, wenn man die ersten Stellen des Decimalbruches mit Einschlufs der 1. Hälfte der Periode um die Vorziffern und um 1 erhöht, den Nenner, wenn man die der Hälfte der Periode entsprechende Potenz von 10 um 1 erhöht und der Summe eben so viele Nullen anhängt, als die Anzahl der Vorziffern beträgt. (Beweis wie im 4. Satze.)

Beispiel. 0,59615384615384 .... = ?

Die Vorziffern = 59, Periode = 615384 und
$$\begin{array}{r} 615 \\ 384 \\ \hline 999; \end{array}$$
folglich der gegebene Decimalbruch $= \frac{59615 + 59 + 1}{100100} = \frac{59675}{100100} = \frac{31}{52}$.

Anmerkung. Es leuchtet wohl ein, dafs die im 4. und 5. Satze gelehrten Verfahren die Rechnung bedeutend abkürzen.

6. Da jeder gemeine Bruch entweder einen endlichen oder einen periodischen Decimalbruch geben mufs (siehe §. 44, 18), so könnte es scheinen, als wenn es unperiodische Decimalbrüche (solche, deren Stellen nie die Regelmäfsigkeit eines periodischen zeigen) nicht geben könne. Es mag daher noch gezeigt werden, dafs es allerdings solche Decimalbrüche giebt.

Ein zwischen zwei ganzen Zahlen liegender Bruch kann immer als ein irreducibler gedacht werden, denn wenn sich auch $\frac{30}{9} = 3\frac{3}{9}$ kürzen läfst, immer mufs der gekürzte Bruch $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ dieselbe Stellung zwischen 3 und 4 behalten, da der gekürzte Bruch dem ursprünglichen gleich ist. Ein Bruch ferner, der zwischen 2 ganzen Zahlen liegt, kann **mit sich selbst** multipliciert keine ganze Zahl geben. Betrachten wir z. B. den zwischen 2 und 3 liegenden irreduciblen Bruch $\frac{49}{20}$. Da sich 49 mit 20 nicht kürzen läfst, so kann sich auch das Produkt $\frac{49}{20} \cdot \frac{49}{20}$ nicht kürzen lassen, weil keine neue Zahl hinzutritt, vielmehr immer nur das Kürzen zwischen 49 und 20 in Frage käme. Dieses Produkt kann also auch nur ein irreducibler Bruch, aber keine ganze Zahl sein. Nur 2 verschiedene Brüche würden multipliciert eine ganze Zahl geben können, z. B. $\frac{10}{7} \cdot \frac{21}{5} = 6$. Nun ist $\sqrt{6}$ nach §. 16 die Zahl, welche mit sich selbst multipliciert die ganze Zahl 6 giebt.

Daher kann für $\sqrt{6}$ kein gemeiner Bruch gefunden werden, da ein solcher, wie so eben bewiesen, mit sich selbst multipliciert die ganze Zahl 6 nicht geben kann. Es können mithin nur gemeine Brüche gefunden werden, die der Zahl $\sqrt{6}$ sich nähern können, z. B. $\frac{485}{198}$; es ist $\frac{485}{198} \cdot \frac{485}{198} = 6\frac{1}{39204}$.

Es bleibt also nichts übrig, als solche Zahlen durch unendliche Decimalbrüche auszudrücken, da man dann dem gesuchten Werte immer näher kommen kann, je mehr Stellen man berechnet, während der vielstellige gemeine Bruch im höchsten Grade unbequem wäre. So findet man z. B. $\sqrt{6} = 2{,}449489\ldots$; denn

$$2{,}44949 \cdot 2{,}44949 = 6{,}0000012601.$$

Der für $\sqrt{6}$ gefundene Decimalbruch kann aber weder ein endlicher noch ein unendlicher periodischer sein. Denn wäre er ein solcher, so liefse er sich (nach §. 45) in einen gemeinen Bruch verwandeln. Dies aber ist unmöglich, weil, wie vorher bewiesen wurde, $\sqrt{6}$ nicht durch einen gemeinen Bruch dargestellt werden kann. Folglich ist dieser Decimalbruch unperiodisch.

7. Man teilt die Zahlen ein in rationale und irrationale. Erstere sind solche, die sich durch ganze Zahlen genau darstellen (genau abgrenzen) lassen; z. B. 13, $\frac{7}{19}$ oder $239\frac{5}{23}$ oder $0{,}363636\ldots$, denn $\frac{7}{19}$ ist genau durch 7 und 19, $0{,}3636\ldots$ genau durch $\frac{4}{11}$, also durch die ganzen Zahlen 4 und 11 dargestellt. Diejenigen Zahlen, welche sich durch ganze Zahlen nicht genau darstellen (genau abgrenzen) lassen, heifsen irrationale. Dieselben können nur in unvollständiger Weise durch einen unperiodischen Decimalbruch ausgedrückt werden; z. B. $\sqrt{6}$ (siehe den 6. Satz) oder $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ oder $lg\,2$ oder $sin\,70^0$ oder die Zahl π ($pi = 3{,}14159265\ldots$, welche den Quotient aus dem Umfange und dem Durchmesser eines jeden Kreises ausdrückt). $\sqrt{49}$ und $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ sind rationale Zahlen, denn erstere ist $= 7$ (da $7 \cdot 7 = 49$), letztere $= \frac{1}{5}$ (da $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$).

Die rationalen Zahlen nennt man auch commensurable (durch die Einheit mefsbare), die irrationalen: incommensurable.

§. 46. Das Rechnen mit abgebrochenen und unvollendeten Decimalbrüchen.

1. Die Genauigkeit eines Zahlenwertes richtet sich nach der Menge der Einheiten der niedrigsten Stelle. Ist z. B. die Entfernung der Gegenstände A und B möglichst genau auf 68,7 Meter bestimmt worden, die von C und D auf 6,874 Centimeter, so ist die letztere Angabe genauer als die erstere, weil sie durch das 6874fache der Einheiten der letzten Stelle (0,01), die erstere aber nur durch das 687fache der Einheiten der letzten Stelle (0,1) bestimmt ist. Beide Entfernungen kann man sich auch als 68700 und 68,74 Millimeter denken, folglich ist die letztere Angabe genauer, weil sie durch 6874 Einheiten der letzten Stelle (Hundertel), erstere nur durch 687 Einheiten der letzten Stelle (Hunderte) ausgedrückt ist.

Eben so ist 40,3 Meilen weniger genau als 0,598 Meter, da jene Angabe das 403fache der letzten Einheit (0,1), diese das 598fache der letzten Einheit (0,001) ist.

Oder: 1871000 Meilen ist weniger genau, wenn nur noch die Tausende bestimmt werden konnten, als 0,2136 Meter, weil jene Angabe das 1871fache der letzten Einheit (1871 Tausende), letztere das 2136fache der letzten Einheit (2136 Zehntausendtel) beträgt.

Ferner hat man sich die letzte Stelle einer Zahl, deren genauerer Wert uns unbekannt ist, als eine nach den Regeln des §. 40 abgebrochene zu denken. Denn ist die Entfernung zweier Gegenstände möglichst genau auf 954,73 Meter bestimmt worden, so meint man damit, dafs diese Entfernung eher 954,73 als 954,74 oder 954,72 Meter ist, so dafs also 954,73 als abgebrochener Decimalbruch erscheint. Mithin hat man beim Rechnen mit solchen gemessenen oder beobachteten Angaben eben so wie direkt bei den abgebrochenen Decimalbrüchen stets zu berücksichtigen, dafs der Fehler nahe $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Stelle betragen kann.

In den hier folgenden Rechnungen mögen die gegebenen Zahlen stets abgebrochene bedeuten, so dafs also die letzte Stelle derselben nahe $\frac{1}{2}$ Einheit zu grofs oder zu klein sein kann, wenn nicht durch einen Punkt über der letzten Stelle angedeutet ist, dafs diese Stelle vollkommen genau, der Decimalbruch also ein endlicher ist.

2. Addition.

$$\begin{array}{r} 4{,}586 \\ +\,12{,}931 \\ +\;\;7{,}899 \\ +\,29{,}458 \\ \hline =54{,}874 \end{array}$$

Die Summe 54,874 kann nahe 2 Einheiten der letzten Stelle, also nahe 0,002, zu grofs oder zu klein sein, weil jeder der 4 Summanden um $\frac{1}{2}$ Einheit falsch sein kann.

Um die unsichere letzte Stelle zu bezeichnen, schreiben Manche $54{,}87_4$.

$$\begin{array}{r} 5,914 \\ +\ 11,8368 \\ +\ 1,56985 \\ +\ 30,89 \\ \hline =50,21065 \end{array}$$

Hier können schon die Hundertel (siehe 30,89) um nahe $\frac{1}{2}$ Einheit falsch sein, folglich ist auch die Summe schon in dieser 2. Decimalstelle bis zu $\frac{1}{2}$ Einheit unsicher, so dafs sie leicht um 0,005 zu grofs oder zu klein sein kann. Die drei letzten Decimalstellen 065 haben daher keinen Sinn und man mufs richtiger nur 50,21 (oder sogar $50,2_1$) schreiben.

Beim Addieren beginnt man daher in dem vorstehenden Beispiele sogleich mit den Hunderteln, die man nur um die 2 aus den Tausendteln hervorgehenden Hundertel vermehrt.

3. Subtraktion. Hier gilt gleichfalls das in der Addition Gesagte.

$$\begin{array}{r} 50,714 \\ -\ 9,638 \\ \hline =41,076 \end{array}$$

Das Resultat kann hier nahe 1 Einheit der letzten Stelle falsch sein, weil jede der beiden gegebenen Zahlen in dieser Stelle um $\frac{1}{2}$ Einheit falsch sein kann. Denn ist z. B. der Subtrahend um $\frac{1}{2}$ Einheit zu klein, so würde der Rest um $\frac{1}{2}$ Einheit zu grofs (s. §. 9, 18, Zus.). Ist nun noch der Minuend $\frac{1}{2}$ Einheit zu grofs, so beträgt der Fehler alsdann eine ganze Einheit.

$$\begin{array}{r} 10,86589 \\ -\ 2,919 \\ \hline =7,947 \end{array}$$

Hier kann der vollständigere Rest 7,94689 oder auch der abgebrochene 7,947 in den Tausendteln nur um eine halbe Einheit (s. den Subtrahend) falsch sein, da die Tausendtel des Minuend noch richtig sind.

$$\begin{array}{r} 212,67 \\ -\ 89,3564 \\ \hline =123,31 \end{array}$$

Hier kann der Rest 123,31, der für 123,3136 gesetzt werden mufs (siehe 2. Satz, letztes Beispiel!), gleichfalls nur um $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Stelle falsch sein, weil der Subtrahend in dieser Stelle noch richtig, der Minuend aber unsicher ist.

4. Multiplication.

Hier wird der Fehler des ungenauern Faktors noch durch den andern Faktor vervielfältigt, folglich mufs das Produkt auch schon in dieser Stelle falsch sein. Man nimmt daher den ungenauern Faktor als Multiplicand, den genauern als Multiplicator und multipliciert zuerst mit den höchsten Stellen des letztern. Wenn aber die letzte Stelle des Multiplicand um $\frac{1}{2}$ Einheit falsch sein kann, so würde das 1. Partialprodukt in der zugehörigen Stelle so viel mal $\frac{1}{2}$ Einheit falsch sein, als die höchste Stelle des Multiplicator Einheiten hat, und folglich hätten die nachfolgenden Stellen keinen Sinn. Man wird mithin die abgekürzte Multiplication (s. §. 42, 4) anwenden und nicht über die letzte Stelle des Multiplicand hinausgehen.

1. Beispiel. $5{,}136 \cdot 0{,}4752 = ?$

Der 2. Faktor ist, wie im Eingange dieses Paragraphs gezeigt wurde, der ungenauere. Folglich:

$$
\begin{array}{r}
0{,}4752 \cdot 5{,}136 \\
\hline
2\,3760 \\
475 = 4752 \cdot 1 \\
143 = 4752 \cdot 3 \\
29 = 4752 \cdot 6 \\
\hline
= 2{,}4407
\end{array}
$$

Der hier in der Stelle 2 des Multiplicand 0,4752 enthaltene Fehler wird noch mit 5 (des Multiplicator) multipliciert, ferner sind auch die nachfolgenden 3 Partialprodukte (475, 143, 29) abgebrochene Zahlen, folglich kann der Fehler in der letzten Stelle des hier gefundenen Produkts schon ziemlich grofs sein (nahe

$$5 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ Einheiten}).$$

Man könnte die beiden Grenzen des Produkts genau bestimmen. Denn sind 0,4752 und 5,136 abgebrochene Zahlen, so sind beide unbedingt kleiner als 0,47525 und 5,1365, und beide unbedingt gröfser als 0,47515 und 5,1355, weil jede letzte Stelle um $\frac{1}{2}$ Einheit, d. i. um 5 Einheiten der nächsten Stelle zu grofs oder zu klein sein kann. Mithin kann das Produkt nicht gröfser als $0{,}47525 \cdot 5{,}1365 = 2{,}44112 \ldots\ldots$ (die „obere Grenze") und nicht kleiner als $0{,}47515 \cdot 5{,}1355 = 2{,}44013 \ldots\ldots$ (die „untere Grenze") sein.

2. Beispiel. $0{,}763194 \cdot 100\dot{0} = 763{,}194$.

Da hier der Fehler in der Stelle 4 leicht $\frac{1}{2}$ Einheit zu grofs oder zu klein sein kann, so kann der Fehler in der letzten Stelle des Produkts $1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$ Einheiten betragen.

$$
\begin{array}{rl}
763{,}194 & \\
500 & \text{addiert} \\
\hline
763{,}694 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
763{,}194 & \\
500 & \text{subtrahiert} \\
\hline
762{,}694. &
\end{array}
$$

Diese beiden Zahlen würden mithin die Grenzen des Produkts vorstellen.

5. Division.

1. Fall. Der Dividend ungenauer als der Divisor.

Da hier die letzte Stelle des Dividend unsicher ist, so darf die abgekürzte Division (§. 43, 5) nicht über diese Stelle hinausgehen (vergl. die vorst. Multiplication).

Beispiel. $1{,}359 : 0{,}08167$.

Der Dividend hat nur 1359, der Divisor 8167 Einheiten der letzten Stelle, jener ist also ungenauer.

$$
\begin{array}{rl}
= 1359_{00} : 8167 = 166{,}3 & \\
817 & = 8167 \cdot 1 \\
\hline
542 & \\
490 & = 8167 \cdot 6 \\
\hline
52 & \\
49 & = 8167 \cdot 6 \\
\hline
3 & \\
3 & = 8167 \cdot 3 \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Da hier die 9 des Dividend schon die unsichere Stelle ist, so durfte die Division nicht über dieselbe hinaus fortgesetzt werden.

Oder: Da die 4. Stelle des Dividend unsicher ist, so darf auch der Quotient nur auf höchstens 4 Ziffern berechnet werden (166,3).

Oder: Die letzte Stelle 3 des Quotient ist unsicher, da es die zugehörige 9 des Dividend ist.

Genauer erhält man die beiden Grenzen des Quotient, wenn man bedenkt, daſs derselbe nicht gröſser als

1,3595 : 0,81665

und nicht kleiner als 1,3585 : 0,81675 sein kann (s. Multiplication). Der Quotient wird nämlich nach §. 13 (18, 2. Zus. und 28, 5. Zus.) am gröſsten, wenn der Divisor am kleinsten und der Dividend am gröſsten genommen wird.

Im 1. Falle würde man aber 166,473 (obere Grenze)
„ 2. „ 166,330 (untere „)
erhalten.

2. Fall. Der Dividend genauer als der Divisor.

Damit hier die Reste und mithin die zugehörigen Quotienten nicht falsch werden, müssen diejenigen Decimalstellen im Dividend weggelassen werden, welche rechts von der letzten Stelle des 1. Partialproduktes liegen.

Beispiel. 0,2971 864 : 0,6438

$$
\begin{array}{rl}
= 2971{,}864 : 6438 = 0{,}4616_{2} & \\
2575\,2 & \\
\hline
396\,7 & : 6438 \\
386\,3 & \\
\hline
10\,4 & : 6438 \\
6\,4 & \\
\hline
4\,0 & : 6438 \\
3\,9 & \\
\hline
1 & : 6438.
\end{array}
$$

Da die Stellen 64 des Dividend unberücksichtigt bleiben müssen, so ist der 1. Rest 29719 — 25752 = 3967.

Genauer würde man den Quotient dadurch bestimmen, dafs man als obere Grenze

$$2971{,}8645 : 6437{,}5 = 0{,}461649,$$

als untere Grenze

$$2971{,}8635 : 6438{,}5 = 0{,}461577 \text{ berechnet.}$$

6. Unvollendete Decimalbrüche. Da 0,763 ..... von 0,763000 .... bis 0,763999 .... (nahe 0,764) ansteigen, die gegebene letzte Stelle also fast um 1 Einheit gröfser sein kann, so würde annähernd die Mitte zwischen beiden Zahlen, d. i. 0,7635 dem kleinsten Werte 0,763 eben so nahe kommen, als dem gröfsten 0,764. Mithin müfste bei unvollendeten (mit Punkten versehenen) Decimalbrüchen mit diesen Mittelwerten gerechnet werden, wenn man nicht der gröfseren Genauigkeit wegen vorzöge, die beiden Grenzen des Resultats aus den Grenzwerten der gegebenen Zahlen zu berechnen.

Beispiel. 0,763 .... : 0,419 ....

Entweder ist im Durchschnitte der Quotient

$$0{,}7635 : 0{,}4195 = 1{,}820,$$

wobei die 4. Decimalstelle unsicher ist, weil es die 4. der gegebenen Zahlen ist. Oder der höchste Wert des Quotient ist

$$0{,}764 : 0{,}419 = 1{,}8234,$$

der niedrigste $0{,}763 : 0{,}420 = 1{,}8167.$

§. 47. Decimalbrüche in Verbindung mit gemeinen Brüchen.

1. Um das Wertverhältnis gemeiner Brüche zu bestimmen (s. §. 32, 7), kann man dieselben in Decimalbrüche verwandeln.

Beispiel. Welcher von den Brüchen

$$\frac{19}{40},\ \frac{43}{90},\ \frac{9}{19},\ \frac{10}{21},\ \frac{11}{23},\ \frac{33}{70}$$

ist der gröfste, welcher der kleinste?

Auflösung.

$$\frac{19}{40} = 0{,}475$$

$$\frac{43}{90} = 0{,}47778$$

$$\frac{9}{19} = 0{,}47368$$

$$\frac{10}{21} = 0{,}47619$$

$$\frac{11}{23} = 0{,}47826$$

$$\frac{33}{70} = 0{,}47143.$$

Folglich $\frac{33}{70}$ der kleinste, $\frac{11}{23}$ der gröfste.

2. Addition und Subtraktion.

$27\frac{2}{3} - 138{,}9146 + 219{,}74389 - 6\frac{9}{19} - \frac{4}{17} = ?$

Verwandle die gemeinen Brüche in Decimalbrüche! Dieselben müssen, wenn die 3. Zahl 219,74389 vollständig benutzt werden soll, mindestens auf 5 Decimalstellen berechnet werden. Denn wollte man z. B. $27\frac{2}{3}$ nur auf 4 Stellen berechnen, so würde die 1. und 3. Zahl als Summe

$$\begin{array}{r} 27{,}6667 \\ 219{,}74389 \\ \hline 247{,}41059 \end{array}$$

ergeben. Hier aber würde zur falschen 5. Decimalstelle 0 der 1. Zahl die richtige Stelle 9 der 2. Zahl addiert worden sein!

Die Rechnung ist daher folgende:

$27{,}66667 - 138{,}9146 + 219{,}74389 - 6{,}47368 - 0{,}23529;$

$$\begin{array}{r} 2\ 7,\ 66667 \\ \triangle 8\ 6\ 1,\ 0854 \\ 2\ 1\ 9,\ 74389 \\ \triangle 3,\ 52632 \\ \triangle,\ 76471 \\ \hline = 1\ 0\ 1,\ 78699. \end{array}$$

Um hier die 5. Decimalstelle (die höchste der gegebenen) desto richtiger zu erhalten, verwandelt man die gemeinen Brüche wohl auch auf 6 oder 7 Decimalstellen.

Auch wenn nur gemeine Brüche zu addieren oder zu subtrahieren sind, benutzt man Decimalbrüche für dieselben, wenn der Generalnenner zu unbequem (zu grofs) sein sollte.

Beispiel.

$$\frac{11}{81} + \frac{516}{625} + \frac{23}{32} + \frac{76}{77} + \frac{31}{37} + \frac{21}{41} + \frac{3943}{4012};$$

Dafür:

$$\begin{array}{l} 0{,}1358025 \\ 0{,}8256 \\ 0{,}71875 \\ 0{,}9870130 \\ 0{,}8378378 \\ 0{,}5121951 \\ 0{,}9828016 \\ \hline 5{,}0000000. \end{array}$$

Auch würde der Wert der Summe, überhaupt jedes Resultates, viel leichter am Decimalbruche beurteilt werden können, als an dem unbequemen gemeinen Bruche mit sehr vielstelligem Zähler und Nenner.

3. Multiplication und Division.

Die Decimalbrüche sind hier fast nie in gemeine, die gemeinen aber nur in besonderen Fällen in Decimalbrüche zu verwandeln. Ferner sind, um das Resultat unbegrenzt richtig zu erhalten, während der Rechnung alle abgebrochenen Decimalbrüche zu vermeiden und nur das Resultat durch einen solchen auszudrücken.

1. Beispiel. $3{,}4716 \cdot 2\frac{6}{7} = 3{,}4716 \cdot \frac{20}{7} = \frac{3{,}4716 \cdot 20}{7}$

$$= \frac{69{,}432}{7} = 9{,}91885714.$$

So weit auch hier die Division durch 7 ausgeführt wird, immer ist das Resultat vollkommen richtig. Bei $3{,}4716 \cdot 2{,}85714$ würden wegen des abgebrochenen 2. Faktors nur die ersten 6 Stellen richtig sein.

2. Beispiel. $31\frac{7}{11} \cdot 0{,}01839 = \frac{348}{11} \cdot 0{,}01839 = \frac{348 \cdot 0{,}01839}{11}$

$$= \frac{6{,}39972}{11} = 0{,}5817927.$$

3. Beispiel. $2\frac{4}{31} : 0{,}173 = \frac{66}{31} : 0{,}173 = \frac{66}{31 \cdot 0{,}173} = \frac{66}{5{,}363}$

$$= 66000{,}0 : 5363 = 12{,}307.$$

```
5363
-----
12370
10726
------
 16440
 16089
 ------
  35100
```

4. Beispiel. $17\frac{8}{11} : 0{,}08009 = ?$

Da die Periode hier eine geringe Anzahl Stellen hat, so ist der Decimalbruch bequemer.

$$17{,}727272\ldots : 0{,}08009$$
$$= 1772727{,}272\ldots : 8009 = 221{,}342.$$

```
16018
-----
 17092
 16018
 -----
  10747
```

```
 10747 (wiederholt)
  8009
 -----
 27382
 24027
 -----
  33557
  32036
  -----
   15212
```

5. Beispiel. $0{,}12367 : 3\frac{4}{9} = 0{,}12367 : \frac{31}{9} = 0{,}12367 \cdot \frac{9}{31}$

$= \frac{0{,}12367 \cdot 9}{31}$ siehe das 1. Beispiel!

§. 48. Teilbrüche.

Es ist $\frac{71}{126} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{126}$.

Ferner ist $\frac{1}{18}$ der 9. Teil von $\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{126}$ „ 7. „ „ $\frac{1}{18}$.

Hätte man daher irgend eine Zahl mit $\frac{71}{126}$ zu multiplicieren, so könnte man auch zuerst die $\frac{1}{2}$ derselben, dann $\frac{1}{9}$ dieses Quotienten und endlich $\frac{1}{7}$ des neuen Quotient berechnen und diese 3 Quotienten addieren.

Beispiel. $5{,}316781 \cdot \frac{71}{126}$;

```
     5,316781  (:2
A = 2,6583905 (:9
B = 0,2953767 (:7
     0,0421967
     ---------
     2,9959639.
```

Den zuerst erhaltenen Quotient bezeichnet man mit A, den 2. mit B, den 3. mit C u. s. w.

Es ist also $\frac{71}{126} = \frac{1}{2} + \frac{A}{9} + \frac{B}{7}$.

Diese Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{7}$ nennt man Teilbrüche.

Um die Nenner der Teilbrüche bequem zu finden, dividiere man den Nenner des gegebenen Bruches durch den Zähler, benutze aber nicht, wie bei der gewöhnlichen Division, die nächstniedere Zahl als Quotient, sondern stets eine höhere, z. B. die

nächsthöhere. Hierauf vermindere man das Produkt aus dem Divisor (gegebenen Zähler) und dem Quotient um den Dividend (gegebenen Nenner) und dividiere immer wieder den ursprünglichen Dividend (Nenner des gegebenen Bruches) durch den erhaltenen Rest, ganz wie beim 1. Mal. Diese Division des gegebenen Nenners (ursprünglichen Dividenden) setzt man so lange fort, bis die Division aufgeht oder das Resultat die gewünschte Genauigkeit erhält. Die erhaltenen Quotienten sind die Nenner der Teilbrüche.

1. Beispiel. Es sei $\frac{71}{126}$ in Teilbrüche zu verwandeln.

$$\begin{array}{l} 126:71=2 \\ \underline{142} \\ 126:16=9 \\ \underline{144} \\ 126:18=7 \\ \underline{126} \\ 0 \end{array}$$

Folglich $\frac{71}{126}=\frac{1}{2}+\frac{A}{9}+\frac{B}{7}$.

Unbequemere Quotienten hätte man erhalten mit

$$\begin{array}{l} 126:71=2 \\ \underline{142} \\ 126:16=8 \\ \underline{128} \\ 126:2=63 \\ \underline{126} \\ 0 \end{array}$$

$\frac{71}{126}=\frac{1}{2}+\frac{A}{8}+\frac{B}{63}$.

Man ersieht hieraus, dafs es oft vorteilhafter ist, nicht den nächsthöhern Quotient, sondern einen beliebig höhern zu nehmen. So würde man z. B. nicht den Quotient 37, sondern 40 benutzen, weil sich durch 40 leichter als durch 37 dividieren läfst.

2. Beispiel. $\frac{7}{12}$?

$$\begin{array}{l} 12:7=2 \\ \underline{14} \\ 12:2=6 \end{array}$$

Daher $\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{A}{6}$.

Es sei z. B. $0{,}8147395\cdot\frac{7}{12}$ zu berechnen;

$$\begin{array}{l} 0{,}8147395 \quad (:2 \\ \hline 0{,}40736975 \quad (:6 \\ 0{,}06789496 \\ \hline 0{,}47526471. \end{array}$$

3. Beispiel. $\frac{33}{76}$?

```
            76:33 = 3
            99
          76:23 = 4
          92
        76:16 = 5
        80
      76:4 = 19
      76
      0
```

Oder wenn die Division durch 19 dem Rechner nicht geläufig wäre:

```
            76:33 = 3
            99
          76:23 = 4
          92
        76:16 = 5
        80
      76:4 = 20
      80
    76:4 = 20
    80
  76:4 = 20 u. s. w.
```

Es sei z. B. $4{,}7381952 \cdot \frac{33}{76}$ zu berechnen.

```
4,7381952 (:3
1,5793984 (:4
0,3948496 (:5
0,0789699 (:20
    39485 (:20
     1974 (:20
       99 (:20
        5
2,0573742
```

4. Beispiel. $0{,}371689 = \frac{371689}{1000000}$; daher:

```
            1000000:371689 = 3
            1115067
        1000000:115067 = 9
        1035603
    1000000:35603 = 30 (29 zu unbequem!)
    1068090
1000000:68090.
```

Selbstverständlich können Dividend und Divisor immer gekürzt werden, nur ist dann in der Folge der durch das Kürzen erhaltene Dividend stets wieder als Dividend zu benutzen.

Daher:

$$\begin{array}{r} 100000:6809=15 \\ 6809 \\ \hline 31910 \\ 34045 \\ \hline 100000:2135 \end{array}$$

Dafür $20000:427=50$ (47 zu unbequem!)

$$\begin{array}{r} 21350 \\ \hline 20000:1350 \end{array}$$

Dafür $400:27=15$

$$\begin{array}{r} 405 \\ \hline 400:5=80. \end{array}$$

Folglich: $0{,}371689=\frac{1}{3}+\frac{A}{9}+\frac{B}{30}+\frac{C}{15}+\frac{D}{50}+\frac{E}{15}+\frac{F}{80}.$

5. Beispiel. $\frac{23}{48}$?

$$\begin{array}{r} 48:23=3 \\ 69 \\ \hline 48:21=3 \\ 63 \\ \hline 48:15=4 \\ 60 \\ \hline 48:12=4. \end{array}$$

Nimmt man einen der Quotienten gröfser, z. B. statt des vorstehenden 2. Quotienten 3 den Quotient 4, so mufs der nachfolgende Quotient kleiner werden, da der gröfsere Rest alsdann zum Divisor wird. Durch Anwendung dieser Bemerkung erreicht man oft bequemere Quotienten.

Beispiel. $\frac{23}{48}$?

$$\begin{array}{r} 48:23=3 \\ 69 \\ \hline 48:21=4 \\ 84 \\ \hline 48:36=2 \\ 72 \\ \hline 48:24=2. \end{array}$$

Beweis für die vorstehende Ableitung der Quotienten der Teilbrüche.

Vergleiche die nachstehenden Zahlen mit dem 3. Beispiele!

$$\begin{aligned} \frac{33}{76} &= \frac{1}{3}+\left(\frac{33}{76}-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}+\frac{99-76}{3\cdot 76} \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{23}{76} \end{aligned}$$

$$\frac{33}{76} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{23}{76} - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{92-76}{4 \cdot 76}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{76}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5} + \left(\frac{16}{76} - \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{80-76}{5 \cdot 76}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}_{B} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}}_{C} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{76} \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{1}{3} + A \cdot \frac{1}{4} + B \cdot \frac{1}{5} + C \cdot \frac{4}{76} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{A}{4} + \frac{B}{5} + \ldots. \text{ (wie oben im 3. Beispiel!).}$$

1. Zusatz. Von besonderem Vorteil werden die Teilbrüche, wenn viele verschiedene Zahlen mit einem und demselben Multiplicator zu multiplicieren sind.

Beispiel. Eine Tabelle enthalte eine grofse Anzahl durch pariser Fufs ausgedrückte Längen. Man will dieselben durch Meter ausdrücken.

Da 1 par. Fufs = 0,3248394 Meter, so wäre jede Mafszahl jener Angaben mit $0{,}3248394 = \frac{3248394}{10000000}$ zu multiplicieren. Man verwandele daher diesen Bruch in Teilbrüche:

$$
\begin{array}{l}
10000000 : 3248394 = 4 \\
\underline{12993576} \\
10000000 : 2993576 = 4 \\
\underline{11974304} \\
10000000 : 1974304 = 6 \\
\underline{11845824} \\
\ldots\ldots : 1845824
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
10000000 : 1845824 = 6 \\
\underline{11074944} \\
10000000 : 1074944 = 10 \\
\underline{10749440} \\
10000000 : 749440;
\end{array}
$$

dafür 1000000 : 74944 = 14
1049216

1000000 : 49216 = 20 u. s. w.

Folglich $0{,}3248394 = \frac{1}{4} + \frac{A}{4} + \frac{B}{6} + \frac{C}{6} + \frac{D}{10} + \frac{E}{14} + \frac{F}{20}$.

Enthielten nun jene Angaben auch

1 preufs. Elle = 2,0531337 par. Fufs,

so wäre die Rechnung folgende:

2,0531337 · 0,3248394 = ?

```
 2,0531337 (:4
 ---------
 0,5132834 (:4
 0,1283209 (:6
    213868 (:6
     35645 (:10
      3565 (:14
       255 (:20
        13
```

1 preufs. Elle = 0,6669389 Meter.

2. Zusatz. Nähert sich der Wert des in Teilbrüche zu verwandelnden echten Bruches der Einheit, so würde die unmittelbare Verwandlung wegen der gröfsern Anzahl Quotienten sehr unpraktisch. Nachfolgende Beispiele zeigen, wie man diesem Übelstande begegnen kann.

Beispiel. 6,194738 · 0,9123476 = ?

1. Verfahren.

$$6{,}194738 \cdot 0{,}9123476 = 6{,}194738\,(1 - 0{,}0876524)$$
$$= 6{,}194738 - 6{,}194738 \cdot 0{,}0876524.$$

Man findet $0{,}0876524 = \frac{1}{12} + \frac{A}{20} + \frac{B}{30} + \frac{C}{11} + \frac{D}{14}$.

Daher: 6,194738 · 0,0876524 ?

```
 6,194738 (:12
 --------
 0,516228 (:20
    25811 (:30
      860 (:11
       78 (:14
        6
 --------
 0,542983.
```

Dies von der oben stehenden Zahl 6,194738 subtr.: 5,651755 das gesuchte Resultat.

2. Verfahren. $6{,}194738 \cdot \overline{0{,}9123476} = ?$ Multipliciert man den 1. Faktor mit 10 und dividiert den 2. durch 10, so bleibt nach §. 13, 11, Zus. das Produkt unverändert. Daher:

$$= 61{,}94738 \cdot \overline{0{,}09123476}.$$

Nun ist $0{,}09123476 = \frac{1}{11} + \frac{A}{300} + \frac{B}{15} + \frac{C}{9} + \frac{D}{12}$.

Folglich 61,94738 (:11
5,631580 (:300
18772 (:15
1251 (:9
139 (:12
12
5,651754.

Das 2. Verfahren ist, wenn es der Multiplicand zuläfst, dem 1. vorzuziehen.

3. Zusatz. Bei gröfseren Multiplicatoren könnte man von der nächstliegenden ganzen Zahl ausgehen oder auch das vorstehende 2. Verfahren anwenden.

1. Verfahren.

1. Beispiel. $7{,}81349 \cdot \underline{4{,}58317} = 7{,}81349\,[4 + 0{,}58317]$

$$= 7{,}81349 \cdot 4 + 7{,}81349 \cdot 0{,}58317$$

$$= 31{,}25396 \quad + 7{,}81349\left[\frac{1}{2} + \frac{A}{7} + \frac{B}{7} + \frac{C}{7} + \frac{D}{20} + \frac{E}{18}\right]$$

2. Beispiel. $18{,}29461 \cdot \underline{5{,}891743} = 18{,}29461\,[6 - 0{,}108257]$

$$= 18{,}29461 \cdot 6 - 18{,}29461 \cdot 0{,}108257$$

$$= 109{,}76766 \quad - 18{,}29461\left[\frac{1}{10} + \frac{A}{13} + \dots\right]$$

2. Verfahren.

1. Beispiel.

$$7{,}81349 \cdot \underline{4{,}58317} = 78{,}1349 \cdot 0{,}458317$$

$$= 78{,}1349\left[\frac{1}{3} + \frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \frac{C}{8}\right]$$

2. Beispiel.

$$18{,}29461 \cdot \underline{5{,}891743} = 182{,}9461 \cdot 0{,}5891743$$

$$= 182{,}9461\left[\frac{1}{2} + \frac{A}{6} + \frac{B}{15} + \frac{C}{20} + \frac{D}{17}\right]$$

Anmerkung. In allen Fällen, in welchen es der Multiplicand gestattet, wird man am besten nach der folgenden praktischen Regel verfahren (vergl. das 2. Verfahren im 2. u. 3. Zus.):

> Enthält die 1. wertvolle Stelle des Multiplicator 1 bis etwa 6 Einheiten, so verschiebt man das Komma so, dafs jene Stelle in die Zehntel rückt, bei einer gröfseren Menge von Einheiten (9, 8, 7) jedoch in die Hundertel.

1. Beispiel. $5{,}192873 \cdot 389{,}1652 = 5{,}192873 \cdot 1000 \cdot 0{,}3891652$

$$= 5192{,}873 \cdot 0{,}3891652$$

$$= 5192{,}873\left[\frac{1}{3} + \frac{A}{6} + \dots\right].$$

2. Beispiel.

$$1{,}287354 \cdot 0{,}000867946 = 1{,}287354 \cdot 0{,}0867946 : 100$$
$$= 0{,}001287354 \cdot 0{,}0867946$$
$$= 0{,}001287354 \left[\frac{1}{12} + \frac{A}{30} + \frac{B}{5} + \frac{C}{5} + \frac{D}{7} + \ldots\right].$$

3. Zusatz. Nach dem vorstehenden 1. Verfahren kann man bei mehrstelligen Multiplicatoren auch von der nächstniedern runden Zahl ausgehen.

1. Beispiel. Es seien beliebige Zahlen mit $519\frac{7}{9}$ zu multiplicieren.

Man denke sich $519\frac{7}{9} = 500 + 19\frac{7}{9}$.

Da nun $500 : 19\frac{7}{9}$, d. i. (mit 9 erweitert)

$$4500 : 178 = 30$$
$$\underline{5340}$$
$$4500 : 840, \text{ dafür (durch } 10 \cdot 6 \text{ gekürzt):}$$
$$75 : 14 = 6$$
$$\underline{84}$$
$$75 : 9 = 9$$
$$\underline{81}$$
$$75 : 6 = 13$$
$$\underline{78}$$
$$75 : 3 = 25,$$

so ist $a \cdot 519\frac{7}{9} = a\left[500 + \frac{A}{30} + \frac{B}{6} + \frac{C}{9} + \frac{D}{13} + \frac{E}{25}\right]$.

Anwendung. $0{,}4317623 \cdot 519\frac{7}{9}$;

$$= 0{,}431\,7623 \cdot 500$$
$$215{,}88115 \quad : 30$$
$$7{,}196038 : 6$$
$$1{,}199340 : 9$$
$$0{,}133260 : 13$$
$$10251 : 25$$
$$410$$
$$= 224{,}420449.$$

2. Beispiel. $a \cdot 63 = a \cdot (60 + 3)$.

Da nun $60 : 3 = 20$, so ist $a \cdot 63 = a \cdot \left[60 + \frac{A}{20}\right]$.

§. 49. Angewandte Zahlen.

1. Um Brüche und zu grofse Zahlen zu vermeiden, hat man einen gewissen Teil oder ein Vielfaches einer Mafseinheit als neue Einheit aufgefafst und derselben besondere Namen gegeben.

Beispiel. 1 Stunde = 60 Minuten.

Die Anzahl der Teile, in welche ein Mafs zerlegt ist, hier 60, heifst Reduktionszahl (Währungszahl). Das früher vorherrschende Duodecimalsystem (1 Groschen = 12 Pfennige, 1 Dutzend = 12 Stück) ist in neuerer Zeit fast durchgängig vom Decimalsystem verdrängt worden (1 Mark = 100 Pfennige). Bei letzterem ist meist die französische (dem Griechischen und Lateinischen entlehnte) Benennungsweise eingeführt, die für das 10fache: deka, 100fache: hekto, 1000fache: kilo, 10000fache: myria, für den 10. Teil: deci, 100. Teil: centi, 1000. Teil: milli setzt. So ist z. B. die Einheit des Längenmafses „der Meter", daher eine Länge von 1000 Metern : Kilometer, der 100. Teil des Meters : Centimeter. Für die meisten Mafse sind besondere Abkürzungen eingeführt, z. B. Meter = m, Centimeter = cm.

In Bezug auf den Gebrauch der Abkürzungen und der zugehörigen Zahlen sind in Deutschland folgende Verfügungen erlassen worden:

I. Die Tausende sind nicht durch ein Komma zu bezeichnen, dafür aber ein Zwischenraum zwischen den Hunderten und Tausenden, zwischen den Hunderttausenden und Millionen u. s. w. zu lassen. Z. B.: 53 716 214 Einwohner.

II. Als Decimalzeichen ist nur das Komma zu benutzen.

III. Die Abkürzungen sind am Schlusse der Zahlen, also nicht über das Decimalzeichen, ferner nicht erhöht, sondern in dieselbe Zeile und endlich ohne Schlufspunkt zu setzen. Es mufs also heifsen: „7,3 m betrug die Länge" und nicht 7,3 m. oder $7{,}3^{m}$ oder $7{,}^{m}3$.

IV. Bei Decimaleinteilung soll in der Regel das Hauptmafs allein bezeichnet werden. Daher nicht 5 m 7,2 cm, sondern 5,072 m.

Der Astronom setzt jedoch die Abkürzungen für die Zeit- und Winkelgröfsen über das Decimalzeichen. Z. B.: $25^{0}\,4'\,7,''6$ (25 Grad 4 Min. $7\frac{6}{10}$ Sec.) oder $7^{h}\,3^{m}\,12^{s},43$ (7 Stunden 3 Minuten $12\frac{43}{100}$ Sec.). Auch schreibt derselbe stets sämtliche 3 Mafse, setzt daher für irgend einen Winkel nicht $4'\,5''$, sondern $0^{0}\,4'\,5''$, nicht $7^{h}\,13^{s}$, sondern $7^{h}\,0^{m}\,13^{s}$.

2. Einteilung der Mafse.

Im Nachstehenden bedeuten die zwischen je 2 Mafsen stehenden Zahlen die Reduktionszahlen. In ( ) stehen die gebräuchlichen Abkürzungen für das vorausgehende Mafs, in [ ] die Gröfse des Mafses verglichen mit andern Mafsen.

I. Zählmafse (Stückmafse).

Gros (oder Grofs) 12 Dutzend 12 Stück (St.).

Schock 4 Mandeln 15 Stück. 1 Bauernmandel = 16 Stück.

Ballen 10 Ries 20 Buch { 24 Bogen Schreibpapier,
25 „ Druckpapier.

II. Längenmaſse.

Die Einheit für dieselben ist in Deutschland, Frankreich u. s. w. der Meter [= 443,296 alte pariser Linien = 38,234394 frühere preuſs. Zoll = 42,374378 frühere sächs. Zoll]. Dieses Maſs wurde Ende vorigen Jahrhunderts in Frankreich eingeführt und sollte der 10millionte Teil des Erdquadrant (der auf der Erdoberfläche vom Pol bis zum Äquator gezogenen Meridianlinie) sein. Neueren Messungen zufolge ist jedoch der Erdquadrant

= 10 000 857,44 Meter.

Die Längenmaſse Deutschlands.

Kilometer (= km) 1000 Meter oder Stab (= m) 100 Centimeter oder Neuzoll (= cm) 10 Millimeter oder Strich (= mm). 1 Decimeter (= dm) oder Kette = 10 Meter.

Die geographische oder deutsche Meile ist der 5400. Teil des Erdäquators = 7420,4407 m.

Die Seemeile (für alle Nationen) = 1854,965 m (nahe $\frac{1}{4}$ geogr. Meile).

Früher in Preuſsen: 1 Fuſs [= 31,38535 cm] 12 Zoll 12 Linien. 1 Elle [= 0,66694 m] = 25$\frac{1}{2}$ Zoll.

Früher in Sachsen: 1 Elle 2 Fuſs [= 28,319 cm] 12 Zoll. 5 Ruten 6 Fuſs 7 Zoll 8 Linien kürzte man mit 5⁰ 6′ 7″ 8‴ ab.

Frankreich. Meter mit seinen Ober- und Unterabteilungen. Früher: Toise 6 pariser Fuſs [= 32,48394 cm] 12 Zoll 12 Linien. Lieue = 4451,9 m.

England. Yard 3 Fuſs [= 30,47945 cm] 12 Zoll. Die englische oder britische Meile = 1609,315 m.

III. Flächenmaſse.

Die Einheit ist in Deutschland, Frankreich u. s. w. das „Ar“, eine quadratische Fläche von 10 m Länge und 10 m Breite.

Deutschland.

Quadratkilometer (= qkm oder □km) 100 Hektar (= ha) 100 Ar (= a) 100 Quadratmeter (= qm oder □m) 10000 Quadratcentimeter (= qcm oder □cm) 100 Quadratmillimeter (= qmm oder □mm).

IV. Winkel- und Bogenmaſse.

Der Kreis wird in 360 Grade (⁰) 60 Minuten (′) 60 Sekunden (″) eingeteilt. Der volle Winkel = 360⁰, der gestreckte Winkel = 180⁰, der rechte Winkel = 90⁰.

V. Körpermaſse.

Einheiten: Kubikmeter, d. i. ein Würfel von 1 Meter Länge, 1 Meter Breite und 1 Meter Höhe, und Liter, d. i. ein Würfel von 10 cm Länge, Breite und Höhe.

Deutschland.

Kubikmeter (= cbm od. ⧈m) 1000000 Kubikcentimeter (= ccm) 1000 Kubikmillimeter (= cmm).

Hektoliter oder Faſs (= hl) 100 Liter oder Kannen oder Neukannen (= l) 2 Schoppen.

1 Scheffel (Neuscheffel) = 50 Liter.

VI. Gewichte.

Die Einheit ist das Gramm, das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser bei $+4^0$ Celsius, daher 1 Kilogramm das Gewicht eines Liters Wasser.

Deutschland.

Tonne (= t) 1000 Kilogramm (Kilo = kg oder k⁰) 1000 Gramm (= g) 1000 Milligramm (= mg).

Noch gebräuchlich: 1 Centner (= Ctr.) 50 Kilogramm 2 Pfund (= ℔) 500 Gramm.

Ursprünglich war noch vorgeschlagen: Dekagramm (= dg) oder Neulot 10 Gramm 100 Centigramm (= *cg*).

Probiergewicht. Der Feingehalt der Gold- und Silberwaren, der Gold- und Silbermünzen wird nach Tausendteln bestimmt. Eine Goldmünze z. B., deren Feingehalt (Korn) 0,750 beträgt, enthält bei 1 Gramm Metalllegierung (1 Gramm Rauhgewicht, Bruttogewicht, Schrot): 0,750 Gramm (Nettogewicht, Korn) Gold und 0,250 Gramm Zusatz (gewöhnlich Kupfer).

VII. Münzen.

Deutschland. Mark (= ℳ) 100 Pfennige (= Pf. oder ₰). Die Gold- und Silbermünzen sind $\frac{9}{10}$ fein (s. oben Probiergewicht).

Geprägt werden:

in Gold: 20 ℳstücke (Doppelkronen) von 1,5 mm Dicke und 22,56 mm Durchmesser. 62,775 Stück gehen auf 1 Pfund.

10 ℳstücke (Kronen) von 1,1 mm Dicke und 19,5 mm Durchmesser. 125,55 Stück auf 1 Pfund.

5 ℳstücke (halbe Kronen) von 17 mm Durchmesser.

in Silber: 5 „ „ 18 wiegen 1 Pfund;
2 „ „ 45 „ 1 „
1 „ „ 90 „ 1 „
50 Pfennigstücke; 180 wiegen 1 Pfund;
20 „ „ 450 „ 1 „

in Nickel (bestehend aus $\frac{3}{4}$ Nickel, $\frac{1}{4}$ Kupfer):
10 Pfennigstücke; 125 wiegen 1 Pfund.
5 „ „ 200 „ 1 „

in Kupfer ($\frac{19}{20}$ Kupfer, $\frac{1}{25}$ Zinn, $\frac{1}{100}$ Zink):
2 Pfennigstücke; 150 wiegen 1 Pfund.
1 „ „ 250 „ 1 „

Österreich. Gulden (= fl.) 100 Kreuzer (Neukreuzer = Xr.). 1 Gulden = 2 deutsche Mark.

Frankreich (Belgien, Italien u. s. w.). Franc 100 Centimes. 1 Franc = 80 deutsche Pfennige.

England. Pfund Sterling (als Goldstück: Sovereign, = £) 20 Schillinge (s oder sh) 12 Pence (Einheit: Penny, = d). 1 Pfund Sterling = 20,3 bis 20,43 ℳ.

Niederlande. Gulden 100 Cents. 1 Gulden = 1,7 ℳ.

Nordamerika. Dollar 100 Cents. 1 Dollar = 4,15 bis 4,25 ℳ.

VIII. Zeitmafse.

Jahr (s. u.) 365 Tage (= Tg. oder d) 24 Stunden (= St. oder h) 60 Minuten (^{m}) 60 Sekunden (^{s}). Die Stunde hat also 60 Zeitminuten, der Grad 60 Bogenminuten.

1 Woche = 7 Tage. 1 Jahr = 12 Monate oder nahezu 52 Wochen. $\frac{1}{4}$ Jahr = Quartal. $\frac{1}{2}$ Jahr = Semester. 5 Jahre = Lustrum. 10 Jahre = Decennium. 100 Jahre = Jahrhundert = Säculum.

Das 19. Jahrhundert beginnt am 1. Januar 1801 und endigt mit dem 31. Dezember 1900.

Die bürgerliche Zeitrechnung beginnt den Tag Nachts 12 Uhr, der Astronom jedoch 12 Stunden später. Es ist daher 25. Dez. früh 4 Uhr bürgerlich so viel als 24. Dez. 16 Uhr astronomisch.

Unser Jahr richtet sich nach den Jahreszeiten, ist also das sogenannte tropische Jahr. Die Länge desselben schwankt innerhalb Jahrtausenden zwischen $365^d 5^h 48^m 9^s,8$ und $365^d 5^h 49^m 24^s,8$, beträgt im Jahre 1884: $365^d 5^h 48^m 47^s,31$ und nimmt jetzt jährlich um $0^s,00595$ ab. Wegen des Rückschreitens des Frühlingspunktes ist dieses tropische Jahr kleiner als die wahre (siderische) Umlaufszeit der Erde um die Sonne, die $365^d 6^h 9^m 10^s,75$ beträgt. Im Jahre 45 vor Chr. Geb. gab Julius Cäsar dadurch dem (tropischen) Jahre die nahezu entsprechende Länge von 365$\frac{1}{4}$ Tagen, dafs er auf je 3 gemeine Jahre von 365 Tagen ein Schaltjahr von 366 Tagen folgen liefs. Dieser sogenannte julianische Kalender oder Kalender alten Styls ist noch immer in Rufsland, Griechenland und Rumänien in Gebrauch. Da man bei der Berechnung des Osterfestes annimmt, dafs der Anfang des Frühlings auf den 21. März fällt, das julianische Jahr von 365$\frac{1}{4}$ Tagen aber etwas gröfser als das tropische ist, so mufste sich der Anfang des Frühlings immer mehr vom 21. März entfernen und fiel im 16. Jahrhundert schon auf den 11. März. Papst Gregor XIII beseitigte diesen Übelstand durch seine Kalenderreform im Jahre 1582. Er liefs auf den 4. Oktober dieses Jahres sofort den 15. Oktober folgen und verordnete, dafs zwar jedes Jahr, dessen Zahl durch 4 teilbar sei, wie bisher ein Schaltjahr, jedoch die durch 100 teilbaren Jahre (z. B. 1700, 1800, 1900, 2100) gemeine Jahre, und die durch 400 teilbaren Jahre (z. B. 2000) wieder Schaltjahre sein sollten. Hierdurch ist zwar die Länge des tropischen Jahres ziemlich erreicht,

aber noch immer um so viel zu grofs, dafs in noch nicht ganz 4000 Jahren wieder ein Tag weggelassen werden müfste.

Dieser „gregorianische“ Kalender oder „Kalender neuen Styls“ ist jetzt in der ganzen civilisierten Welt im Gebrauch.

Berechnung des gregorianischen Osterfestes für das Jahr n.

Bezeichnet man mit () den bei der Divison erhaltenen Rest, z. B. $\left(\frac{1884}{4}\right)=0$, $\left(\frac{3827}{4}\right)=3$; mit [] die in dem Quotient enthaltene ganze Zahl, z. B. $\left[\frac{1885}{100}\right]=18$, so hat man der Reihe nach folgende Reste und Quotienten zu berechnen:

$$\left(\frac{n}{19}\right)=a;\ \left(\frac{n}{4}\right)=b;\ \left(\frac{n}{7}\right)=c;\ \left[\frac{n}{100}\right]=s;\ \left[\frac{13+8s}{25}\right]=t;$$

$$\left[\frac{s}{4}\right]=u;\ \left(\frac{15+s-t-u}{30}\right)=v;\ \left(\frac{4+s-u}{7}\right)=w;$$

$$\left(\frac{19a+v}{30}\right)=d;\ \left(\frac{2b+4c+6d+w}{7}\right)=e.$$

Alsdann fällt im Jahre n das Osterfest auf den

$22+d+e^{\text{ten}}$ März oder $d+e-9^{\text{ten}}$ April.

Hierbei finden jedoch die folgenden 2 Ausnahmen statt:

1) Statt des 26. April ist stets der 19. zu nehmen.

2) Ist $d=28$, $e=6$ und $\left(\frac{11a+11}{30}\right)<19$, so ist stets für den 25. April der 18. zu nehmen.

3. Resolvieren. Verwandeln der Mafse in untergeordnete. Man multipliciert mit der Reduktionszahl.

1. Beispiel. $17\frac{4}{7}$ Tage = Sekunden?

Da 1 Tag = 24 St. = $24\cdot60$ Min. = $24\cdot60\cdot60$ oder 86400 Sec., so sind $17\frac{4}{7}$ Tage = $17\frac{4}{7}\cdot86400=1518171\frac{3}{7}$ Sek.

2. Beispiel. $17\frac{4}{7}$ Tage = Tg. Min. Sek.?

Es ist $17\frac{4}{7}$ Tg. = 17 Tge. + $\frac{4}{7}$ Tg. = 17 Tge. + $\frac{4}{7}\cdot24$ St. = 17 Tge. + $13\frac{5}{7}$ St. = 17 Tge. + 13 St. + $\frac{5}{7}\cdot60$ Min. = 17 Tge. + 13 St. + $42\frac{6}{7}$ Min. = 17 Tge. + 13 St. + 42 Min. + $\frac{6}{7}\cdot60$ Sek. = $17^{\text{d}}\,13^{\text{h}}\,42^{\text{m}}\,51\frac{3}{7}^{\text{s}}$.

3. Beispiel. 5 Tge. 14 St. 39 Min. 12,3 Sek. = Sek.

5 Tge. = 5 · 24 St.
= 120 St.
14 „ add.
= 134 St. = 134 · 60 Min.
= 8040 Min.

$= 8040$ Min. (wiederholt)
$\underline{39 \;\text{„}}$ add.
$= 8079$ Min. $= 8079 \cdot 60$ Sek.
$= 484740$ Sek.
$12{,}3$ „ add.
$= 484752{,}3$ Sek.

4. Reducieren. Verwandeln der Maſse in übergeordnete. Man dividiert durch die Reduktionszahl.

1. Beispiel. 471236,3 Sek. = Tge. St. Min. Sek.?

471236,3 Sek. = 47123 6,3 : 60 Min.
$= 47123^{5}/6{,}3 : 60$ (s. §. 28, G, 5)
$= 7853$ Min. $\underline{56{,}3 \text{ Sek.}}$
7853 Min. = 7853 : 60 St.
$= 785^{5}/3 : 60$
$= 130$ St. $\underline{53 \text{ Min.}}$
130 St. = 130 : 24 Tge. = $\underline{5 \text{ Tage}}$
120
$\underline{10 \text{ St.}}$

Daher = 5 Tge. 10 St. 53 Min. 56,3 Sek.

2. Beispiel. 471236,3 Sek. = Tge.?

Da 1 Tg. = 86400 Sek. (s. 3, 1. Beisp.), so sind
471236,3 Sek. = 471236,3 : 86400 Tge.
$= 4712{,}363 : 864 = 5{,}4541$ Tge.
4320
3923
3456
4676
4320
3563
3456
1070

5. Addieren mit ungleichbenannten Zahlen.

Nur Gleichartiges kann addiert werden, daher auch nur gleiche Maſse.

Beispiel.

7592,7273 Min. + 37,4692 Tge. + 193 Tge. 14 St. 3 Min. 46,67 Sek. = ?

d. i.	5 Tge.	6 St.	32 Min.	43,64 Sek.
	37 „	11 „	15 „	38,88 „
	193 „	14 „	3 „	46,67 „
	236 Tge.	7 St.	52 Min.	9,19 Sek.

Die durch die Addition erhaltenen 129 Sek. sind in 2 Min. 9 Sek. zu verwandeln und die 2 Min. zu den 32 + 15 + 3 Min. zu addieren.

6. Zeitrechnung. Addieren bei derselben.

Da nur Gleichartiges addiert werden darf, so kann auch nicht laufende Zeit (d. i. durch Ordnungszahlen ausgedrückte Zeit, z. B. 1848 den 20. März) und verflossene Zeit (z. B. 23 Jahre 10 Mon. 5 Tage) addiert oder subtrahiert werden. Daher sind alle Zeitangaben in verflossene Zeit zu verwandeln. Um 1848 den 20. März in verflossene Zeit zu verwandeln, hat man zu berücksichtigen, daſs 1847 volle Jahre verflossen sind, wenn man 1848 schreibt, daſs volle 2 Monate verflossen sind, wenn man „März“ schreibt, und 19 volle Tage verflossen sind, wenn man den 20. schreibt. Folglich ist die verlangte verflossene Zeit = 1847 Jahre 2 Mon. 19 Tage. Umgekehrt würde 1859 Jahre 11 Mon. 3 Tage verflossene Zeit in das Datum „1860 den 4. Dec.“ zu verwandeln sein.

Beispiel. *A* ist 1829 den 19. Juli geboren und 52 Jahre 9 Mon. 23 Tage alt geworden. Wann starb er?

1. übliche Berechnungsweise:

Zu addieren:	1828 Jahre	6 Mon.	18 Tage	verflossene Zeit.
	52 „	9 „	23 „	
	1881 Jahre	4 Mon.	10 Tage	

d. i. den 11. Mai 1882.

Hier hatte man zunächst 6 Mon. 18 Tage + 23 Tage = 6 Mon. + 41 Tage zu addieren. Da hier aber zu den 6 verflossenen Monaten 1 ganzer Monat, also der 7. (Juli) zu addieren ist, der 31 Tage hat, so sind jene 41 Tage = 1 Mon. 10 Tage, folglich 6 Mon. 18 Tge. + 23 Tge. (s. Aufgabe) = 7 Mon. 10 Tge. verflossene Zeit, wozu nun erst die 9 Mon. der untern Zeile zu addieren sind.

2. übliche Berechnungsweise.

Da man vom 18. Mai bis 18. Juni, oder vom 18. Juni bis 18. Juli u. s. w. 1 Monat rechnet, so addiert man zunächst zu 1828 Jahren 6 Mon. 18 Tge.: 52 Jahr 9 Mon. = 1881 Jahre 3 Mon. 18 Tge. verflossene Zeit, d. i. 1882 den 19. April. Hierzu sind nun noch die 23 Tage (der unteren Zeile) zu addieren = 1882 den 42. April oder (30 Tage subtrahiert, weil der April 30 Tage hat) = 1882 den 12. Mai.

7. Subtraktion mit ungleichbenannten Zahlen.

1. Beispiel.

	24	60	36
27 · Tge.	4 · St.	$7 \cdot \frac{5}{9}$ Min.	20
	27	66	56
9 „	13 „	$48\frac{11}{12}$ „	33
= 17 Tge.	14 St.	$18\frac{23}{36}$ Min.	

Hier ist 1 Min. $= \frac{36}{36}$ Min., dann 1 St. = 60 Min. und zuletzt 1 Tg. = 24 St. geborgt worden.

2. Beispiel.

$$\begin{array}{rrr} & {\scriptstyle 24.} & {\scriptstyle 60} \\ 163.\ \text{Tge.} & \text{— St.} & \text{— Min.} \\ 89\ „ & 21\ „ & 38\tfrac{3}{5}\ „ \\ \hline = 73\ \text{Tge.} & 2\ \text{St.} & 21\tfrac{2}{5}\ \text{Min.} \end{array}$$

Hier mufste 1 Tg. = 24 St., dann von den 24 St. : 1 St. = 60 Min. geborgt werden.

8. Subtraktion bei Zeitrechnung. (Vergl. den 6. Satz).

1. Beispiel. *N.* starb am 16. April 1846 im Alter von 28 J. 9 Mon. 24 Tagen. Wann war er geboren?

$$\left.\begin{array}{rrr} & {\scriptstyle 14} & {\scriptstyle 46} \\ 1845.\ \text{Jahr} & 3.\ \text{Mon.} & 15\ \text{Tge.} \\ 28\ „ & 9\ „ & 24\ „ \\ \hline 1816\ \text{Jahr} & 5\ \text{Mon.} & 22\ \text{Tge.} \end{array}\right\}\ \text{verflossene Zeit,}$$

d. i. den 23. Juni 1817.

Hier wurde 1 Mon. = 31 Tage geborgt, weil es der Monat März war.

2. Beispiel. *S.* wurde den 19. Okt. 1799 geboren und starb den 4. Juni 1873. Wie alt wurde er?

1. Verfahren. Von 1799 den 19. Okt. bis 1800 den 19. Mai sind es 7 Monate, von 1800 den 19. Mai bis 1873 den 19. Mai: 73 Jahre, vom 19. Mai bis 4. Juni, d. i. vom 19. Mai bis (31 + 4. oder) 35. Mai : 16 Tage. Daher 73 Jahr 7 Mon. 16 Tge.

2. Verfahren. Von 1799 den 19 Okt. bis 1872 den 19. Okt. = 73 Jahre. Vom 19. Okt. bis 1. Nov. oder 19. Okt. bis 32. Okt. = 13 Tage. Hierzu für

$$\begin{array}{ccccccccccccccl} \text{Nov.} & & \text{Dec.} & & \text{Jan.} & & \text{Febr.} & & \text{März} & & \text{April} & & \text{Mai} & & \\ 30 & + & 31 & + & 31 & + & 28 & + & 31 & + & 30 & + & 31 & = & 212\ \text{Tage} \end{array}$$

und vom 1. Juni bis 4. Juni = 3 Tage.

Daher 73 Jahre und 13 + 212 + 3 Tage
oder 73 Jahre 228 Tage.

9. Multiplication und Division mit ungleichbenannten Zahlen.

Bei kleineren Multiplicatoren und Divisoren, deren 1 bis 9faches geläufig ist, behält man die einander untergeordneten — sogenannten ungleichbenannten — Mafse bei.

1. Beispiel.

$$\begin{array}{l} 31\ \text{St.}\ 14\ \text{Min.}\ 25\tfrac{2}{9}\ \text{Sec.} \cdot 6 \\ \hline 187\ \text{St.}\ 26\ \text{Min.}\ 31\tfrac{1}{3}\ \text{Sek.} \end{array}$$

Hier begann man mit

$$25\tfrac{2}{9}\ \text{Sek.} \cdot 6 = 151\tfrac{1}{3}\ \text{Sek.} = 2\ \text{Min.}\ 31\tfrac{1}{3}\ \text{Sek.}$$

und addierte die 2 Min. zu dem Produkte 14 Min. · 6 u. s. w.

2. Beispiel.

$$\begin{array}{l} \overset{2}{44}\text{ Tge. } \underset{61}{13}\text{ St. } \underset{318,3}{48,3}\text{ Min.} : 7 \\ \hline 6\text{ Tge. } 8\text{ St. } 49,8\text{ Min.} \end{array}$$

Zuerst 44 Tge. : 7 = 6 Tge. + $\frac{2 \text{ Tage}}{7}$. Die Aufgabe daher gedacht:

$$(42\text{ Tge.} + 2\text{ Tge.} + 13\text{ St.} \ldots) : 7 = (42\text{ Tge.} + 61\text{ St.} + \ldots) : 7$$
$$= 6\text{ Tge.} + 8\text{ St.} + \ldots .$$

Hieraus folgt, dafs der Rest stets in das nächstniedere Mafs zu verwandeln ist, um dann die nun vorhandenen Einheiten dieses letzteren Mafses zu dividieren.

3. Beispiel.

$$4\text{ Tge. } 23\text{ St. } 17\tfrac{5}{8}\text{ Min.} : 1\tfrac{2}{7} = 4\text{ Tge. } 23\text{ St. } 17\tfrac{5}{8}\text{ Min.} \cdot \tfrac{7}{9}.$$

Daher

$$\begin{array}{l} 4\text{ Tge. } 23\text{ St. } 17\tfrac{5}{8}\text{ Min.} \cdot 7 \\ \hline 34\text{ Tge. } \underset{187}{19}\text{ St. } \underset{423}{3\tfrac{3}{8}}\text{ Min.} : 9 \\ \hline = 3\text{ Tge. } 20\text{ St. } 47\tfrac{1}{24}\text{ Min.} \end{array}$$

Bei Divisionen durch mehrstellige Divisoren behält man gleichfalls die ungleichbenannten Mafse bei, wenn keine Multiplication mit mehrstelligen Zahlen damit verbunden ist.

4. Beispiel.

Welches ist der $294\frac{5}{8}$ te Teil von 34567 ℳ 89 ₰?

$$= 34567\text{ ℳ } 89\text{ ₰} : 294\tfrac{5}{8} = 34567\text{ ℳ } 89\text{ ₰} \cdot \frac{8}{2357};$$

$$\begin{array}{l} 34567\text{ ℳ } 89\text{ ₰} \cdot 8 \\ \hline 276543\text{ ℳ } 12\text{ ₰} : 2357 = \underline{117\text{ ℳ } 32\tfrac{1988}{2357}\text{ ₰}} \\ 2357 \\ \hline 4084 \\ 2357 \\ \hline 17273 \\ 16499 \\ \hline 744\text{ ℳ} = 77400\text{ ₰} \\ \qquad\qquad 12\text{ „ (s. Dividend)} \\ \hline \qquad 77412\text{ ₰} \\ \qquad 7071 \\ \hline \qquad 6702 \\ \qquad 4714 \\ \hline \qquad 1988 \end{array}$$

Bei mehrstelligen Multiplicatoren dagegen ist es gewöhnlich vorteilhafter, die verschiedenen Mafse in das niedrigste Mafs zu verwandeln.

5. Beispiel. 29 Tge. 12 St. 44,73 Min. · $6\frac{69}{83}$

$= 29$ „ 12 „ 44,73 „ $\cdot \frac{567}{83}$; daher

```
  42524,73 Min. · 567
 ____________________
  21262 365
   2551 483 8
    297 673 11
 ____________________
  24111 521,91 Min. : 83 = 290500,26 Min.
  166
  ___
   751
   747
   ____
     415
     415
     ____
       219
       166
       ___
        531
```

= 4841 St. 40,26 Min. (s. §. 28, G, 5)
= 201 Tge. 17 St. 40,26 Min.

6. Beispiel. Nachstehende Aufgabe rechnete Dase in 26 Sekunden im Kopfe. 2600 Rℓ : $338\frac{97}{240}$

$= 2600$ Rℓ $\cdot \frac{240}{81217}$

= 624000 Rℓ : 81217 = 7 Rℓ $204\frac{76032}{81217}$ ₰

```
  568519
 _________
   55481 · 300
 _____________
  16644300 ₰ u. s. w.
```

7. Beispiel. 391 ℳ wurden unter eine Anzahl Arme verteilt. Jeder erhielt 85 ₰. Wie viel Arme waren es?

391 ℳ : 85 ₰ = ?

Nach §. 12 *e* können nur gleichbenannte Gröſsen durch einander dividiert werden. Daher:

```
39100 ₰ : 85 ₰ = 460
340
___
 510
 510
 ___
   0
```

(unbenannte Zahl — s. §. 12,5. Es ist 85 ₰ in 39100 ₰ 460mal enthalten!)

Die Anzahl der Armen ist also 460.

8. Beispiel. 517 Tge. $11\frac{2}{7}$ St. : 31 Min. $17\frac{7}{9}$ Sek.

```
  517·24
 _______
 1034
  2068
    11 2/7
 _______
 12419 2/7 St. · 3600 (da 1 St. = 60 · 60 Sek.)
```

$12419\frac{2}{7}$ St. · 3600 (wiederholt)

$1028\frac{4}{7}$
37257
74514

$44709428\frac{4}{7}$ Sek. : $1877\frac{7}{9}$ Sek.

$$= 44709428\frac{4}{7} \cdot \frac{9}{16900}$$

(.9

$402384857\frac{1}{7} : 16900$ (s. §. 28, G, 5)

$= 4023848 / 57\frac{1}{7} : 169 = 23809\frac{893}{1183}$.
338
643
507
1368
1352
1648
1521

$$12757\frac{1}{7} : 16900 = \frac{89300}{7 \cdot 16900} = \frac{893}{7 \cdot 169} = \frac{893}{1183}$$

Es ist also 31 Min. $17\frac{7}{9}$ Sek. in 517 Tgn. $11\frac{2}{7}$ St. $23809\frac{893}{1183}$ mal enthalten.

8. Beispiel. 94 Tge. 7 St. 43 Min. 37,9 Sek. · 21,22573
= 8149417,9 Sek. · 21,22573

0,2122573 in Teilbrüche verwandelt

$$= \frac{1}{6} + \frac{A}{4} + \frac{B}{11} + \frac{C}{30} + \frac{D}{13} + \frac{E}{100}$$

Daher:
814941790 Sek. : 6
135823631,7 : 4
33965907,9 : 11
3086900,7 : 30
102896,7 : 13
7915,1 : 100
79,2
172977331,3 Sek.
= 2002 Tge. 1 St. 15 Min. 31,3 Sek.

§. 50. Proportionalität.

Anwendung des Bisherigen auf Lösung von Aufgaben.

1. Bewirkt die Änderung einer Gröfse die Änderung einer zweiten, so ist die eine abhängig von der andern. So ist z. B. der Preis einer Ware abhängig von dem Gewichte derselben.

2. Bewirkt das Gröſser- (oder Kleiner-) werden einer Gröſse, daſs eine andere von ihr abhängige Gröſse eben so vielmal so groſs (oder so klein) wird, so ist die zweite der erstern proportional.

Der Preis einer Ware ist gewöhnlich ihrem Gewichte proportional. 3 ℔ einer Ware kosten 3mal so viel als 1 ℔.

Ein Arbeiter vollbringt in 4 Stunden 4mal so viel als in 1 Stunde. (Die Arbeit ist der Zeit proportional.)

6 Arbeiter vollbringen in derselben Zeit 6mal so viel als 1 Arbeiter. (Die Arbeit ist der Kraft proportional.)

3. Eine Gröſse ist einer zweiten umgekehrt proportional (indirekt proportional), wenn das 2, 3, 4, 5 .... Mal-so-groſs-werden der zweiten ein 2, 3, 4, 5 .... Mal-so-klein-werden der erstern bewirkt.

4 Arbeiter brauchen 4mal so wenig Zeit als 1 Arbeiter. (Die Zeit ist der Kraft umgekehrt proportional.)

1 Person reicht mit demselben Vorrat von Lebensmitteln 10mal so lange als 10 Personen.

4. Die Falltiefe eines Körpers ist dem Quadrat der Fallzeit proportional. Ein Körper fällt in 7 Sek. 49mal so tief als in 1 Sek.

Die Beleuchtung einer Fläche ist dem Quadrat des Lichtabstandes umgekehrt proportional. Ein Geldstück wird 5 Meter vom Licht entfernt 25mal so schwach beleuchtet, als bei 1 Meter Entfernung.

5. Lösung von Aufgaben durch Reduktion auf die Einheit (Einheitsschluſs).

1. Aufgabe. Für 7 ℳ bekommt man 5 ℔ einer Ware. Wie viel kosten 9 ℔?

Auflösung. 5 ℔ kosten 7 ℳ, folglich kostet 1 ℔ den 5. Teil von 7 ℳ. Oder:

$$1 \text{ ℔ kostet } \frac{7}{5} \text{ ℳ}$$

9 ℔ kosten aber 9mal so viel als 1 ℔, folglich:

$$9 \text{ ℔ kosten } \frac{7}{5} \cdot 9 \text{ ℳ} = 12\tfrac{3}{5} \text{ ℳ}$$

Anmerkung. Bei (direkt) proportionalen Gröſsen kann man also stets beide Zahlen mit einer gleichen Zahl multiplicieren oder beide durch dieselbe Zahl dividieren.

Beispiele. 5 ℔ kosten 7 ℳ; beide mit 3 mult.:
15 „ „ 21 „ ; oder beide durch 7 div.:
$\frac{5}{7}$ „ „ 1 „

Zusatz. Die Berechnungsweise, welche eine Gröſse aus 3 gegebenen Gröſsen findet, nennt man auch Regel de tri, wie-

wohl Regel de tri im engern Sinne die angewandte einfache Proportion ist.*)

2. Aufgabe. In $2\frac{3}{5}$ Stunden fliefsen $87\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus einer Röhre. Wie viel Liter in $18\frac{4}{7}$ Min.?

Auflösung. In $2\frac{3}{5}$ Stunden fliefsen $87\frac{1}{2}$ Liter.

Da in weniger Zeit auch weniger ausfliefst, so kann man hier beide Zahlen durch $2\frac{3}{5}$ dividieren.

In 1 St. fliefsen $\frac{87\frac{1}{2}}{2\frac{3}{5}}$ Liter; d. i.

„ 60 Min. „ $\frac{87\frac{1}{2}}{2\frac{3}{5}}$ „ ; durch 60 div.:

„ 1 „ „ $\frac{87\frac{1}{2}}{2\frac{3}{5}\cdot 60}$ Liter; mit $18\frac{4}{7}$ mult.:

„ $18\frac{4}{7}$ „ „ $\frac{87\frac{1}{2}\cdot 18\frac{4}{7}}{2\frac{3}{5}\cdot 60}$ Liter; d. i.

$$\frac{175\cdot 130\cdot 5}{2\cdot 7\cdot 13\cdot 60}\ (\text{s. §. 37}) = 10\tfrac{5}{12}\ \text{Liter.}$$

3. Aufgabe. 18 Pferde reichen mit einer Quantität Hafer $7\frac{1}{2}$ Monate. Wie lange werden damit 20 Pferde reichen?

Auflösung. 18 Pferde reichen $7\frac{1}{2}$ Mon.

1 Pferd wird offenbar 18mal so lange mit derselben Quantität Hafer reichen als 18 Pferde.

Folglich: 1 Pferd reicht $7\frac{1}{2}\cdot 18$ Mon.

Hieraus folgt, dafs bei indirekt proportionalen Gröfsen immer die eine der beiden Zahlen multipliciert, die andere dividiert werden mufs.

Da nun 20 Pferde nur den 20. Teil der Zeit reichen, die 1 Pferd reicht, so hat man:

$$20 \text{ Pferde reichen } \frac{7\frac{1}{2}\cdot 18}{20} \text{ Monate.}$$

Die gesuchte Gröfse ist also

$$= \frac{7\frac{1}{2}\cdot 18}{20} = \frac{15\cdot 18}{2\cdot 20} = 6\tfrac{3}{4} \text{ Monate.}$$

4. Aufgabe. Ein Gefäfs kann durch 3 Röhren a, b, c gefüllt werden. a allein füllt das Gefäfs in 12 Minuten, b in 15,

*) Die „Proportion" benutzt zwar gleichfalls die Proportionalität, darf aber nicht — wie es von der bisherigen unlogischen Mathematik geschehen ist — vor den binomischen Gleichungen (Algebra) gelehrt werden. Denn ob die bedingte Gleichung die Form $a + b = c - x$ u. s. w., oder $a : b = c : x$ hat ist vollkommen gleichgültig. Auch können die Sätze der Proportion nur mittelst der algebraischen Auflösungssätze streng bewiesen werden.

c in 18 Min. In welcher Zeit wird das Gefäfs gefüllt, wenn alle 3 Röhren zugleich geöffnet werden?

Auflösung. a füllt in 1 Minute $\frac{1}{12}$ des Gefäfses,

b „ „ „ „ $\frac{1}{15}$ „ „

c „ „ „ „ $\frac{1}{18}$ „ „

Folglich füllen alle 3 Röhren in 1 Minute $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}$, d. i. $\frac{37}{180}$ des Gefäfses. Wenn aber

das $\frac{37}{180}$fache des Gefäfses in 1 Min. gefüllt wird, so wird (mit 180 multipliciert):

das 37fache des Gefäfses in 180 Min. und (durch 37 div.):
„ 1fache „ „ , d. i. das Gefäfs selbst, in

$$\frac{180}{37} = 4\tfrac{32}{37} \text{ Min. gefüllt.}$$

5. Aufgabe. N fährt 480 Kilogr. für $10\frac{1}{2}$ ℳ 15 Meilen weit. Wie viel Kilogr. kann er für $17\frac{1}{2}$ ℳ 12 Meilen weit fahren?

Auflösung:

A. N. fährt 480 Kilogr. für $\underline{10\frac{1}{2}\ ℳ}$ 15 Meilen weit. Wie viel Kilogramm kann er für $\underline{17\frac{1}{2}\ ℳ}$ 15 Meilen weit (also gleichweit) fahren?

Folglich: 480 Kilogr. für $10\frac{1}{2}$ ℳ,

$\frac{480}{10\frac{1}{2}}$ „ „ 1 „

$\frac{480 \cdot 17\frac{1}{2}}{10\frac{1}{2}}$ „ „ $17\frac{1}{2}$ „

B. Man weifs nun, dafs $N \frac{480 \cdot 17\frac{1}{2}}{10\frac{1}{2}}$ Kilogr. für $17\frac{1}{2}$ ℳ $\underline{15\text{ Meilen}}$ weit fährt. Wie viel Kilogramm kann er für $17\frac{1}{2}$ ℳ (also für dasselbe Geld) $\underline{12\text{ Meilen}}$ weit fahren?

Ist die vorstehende Frage gelöst, so ist auch die ursprünglich gegebene Aufgabe gelöst, wie eine Vergleichung derselben mit dem 2. Teile von B zeigt.

Es werden also (s. B) $\frac{480 \cdot 17\frac{1}{2}}{10\frac{1}{2}}$ Kilogr. 15 Meilen weit gefahren. Ist die Entfernung nur 1 Meile, also 15mal so gering,

so kann man offenbar für dasselbe Geld 15mal so viel fahren. Daher:

$$\frac{480 \cdot 17\frac{1}{2} \cdot 15}{10\frac{1}{2}} \text{ Kilogr. 1 Meile weit.}$$

Bei 12mal so grofser Entfernung kann man nur 12mal so wenig fahren:

$$\frac{480 \cdot 17\frac{1}{2} \cdot 15}{10\frac{1}{2} \cdot 12} \text{ Kilogr. 12 Meilen weit.}$$

Die Lösung der ursprünglichen Aufgabe ist also:

$$= \frac{480 \cdot 17\frac{1}{2} \cdot 15}{10\frac{1}{2} \cdot 12} = \frac{480 \cdot 35 \cdot 15 \cdot 2}{2 \cdot 21 \cdot 12} = 1000 \text{ Kilogr.}$$

Vorstehende Auflösung läfst sich offenbar übersichtlicher und kürzer rechnen, wenn man zunächst die Angaben der Aufgabe in 2 Zeilen so anordnet, dafs man die Angaben des ersten, vollständig bekannten Teiles der Aufgabe in die 1. Zeile, und unter jedes Element das gleichartige des 2., die zu suchende Gröfse enthaltenden Teiles der Aufgabe setzt. Hierbei kann man die gesuchte Gröfse vorläufig mit einem ? bezeichnen.

Mithin ist die

Ordnung: 480 Kilogr. $10\frac{1}{2}$ ℳ 15 Mln. (1. Teil der Aufgabe)
 ? „ $17\frac{1}{2}$ „ 12 „ (2. „ „ „)

Das Resultat ist, wie die oben ausgeführte Auflösung zeigte, ein Bruch, bei welchem der 1. Faktor des Zählers diejenige bekannte Gröfse (480 Kilogr.) des 1. Teiles der Aufgabe ist, welcher die zu suchende (mit ? bezeichnete) Gröfse des 2. Teiles gegenüber steht. Daher zunächst

$$\text{die gesuchte Gröfse} = \frac{480 \cdot \ldots\ldots}{\ldots\ldots} \text{ Kilogr.}$$

Durch eine Frage bestimmt man nun, welches von den beiden gleichartigen, in der Ordnung unter einander stehenden Elementen in den Zähler und welches in den Nenner kommen mufs.

1. Frage. (Ansetzen der Mark).

480 Kilogr. fährt $N.$ für $10\frac{1}{2}$ ℳ;
wie viel „ „ „ „ $17\frac{1}{2}$ „ (eben so weit — s. A!)?

Antwort. Mehr Kilogramm! Mehr Kilogramm erhält man aber, wenn man mit der gröfsern Zahl ($17\frac{1}{2}$) multipliciert und durch die kleinere Zahl ($10\frac{1}{2}$) dividiert.

Man findet somit $\frac{480 \cdot 17\frac{1}{2}}{10\frac{1}{2}}$ Kilogr.

2. Frage. (Ansetzen der Meilen).

$\frac{480 \cdot 17\frac{1}{2}}{10\frac{1}{2}}$ Kilogr. fährt $N.$, wie so eben berechnet worden ist, 15 Meilen weit; wie viel Kilogr. (für das gleiche Geld — s. B!) 12 Meilen weit?

Antwort. Mehr Kilogramm, folglich mufs die gröfsere Zahl (15) multiplicieren, die kleinere (12) dividieren.

Die gesuchte Gröfse ist mithin $= \frac{480 \cdot 17\frac{1}{2} \cdot 15}{10\frac{1}{2} \cdot 12}$.

Zu beachten ist, dafs man bei der 1., die Mark ansetzende Frage, die Meilen gleichgrofs annahm (s. oben A : 15 Meilen in den beiden Teilen!), bei der 2., die Meilen ansetzenden Frage aber die Mark gleichgrofs annahm (s. oben B : $17\frac{1}{2}$ ℳ in den beiden Teilen!).

Aus Vorstehendem ergiebt sich nun als Regel für die Auflösung jeder Aufgabe:

> Man ordnet (der Übersicht wegen) zuerst die Angaben der Aufgabe so, dafs die gleichartigen unter einander zu stehen kommen. Hierauf setzt man als 1. Faktor des Zählers des gesuchten Bruches diejenige Gröfse der geordneten Angaben, unterhalb welcher die gesuchte (mit ? bezeichnete) Gröfse sich befindet. Von den übrigen unter einander stehenden gleichartigen Gröfsen nimmt man nun das 1. Paar heraus und untersucht durch eine Frage, welches von den beiden Elementen in den Zähler gesetzt werden mufs, wobei die übrigen gleichartigen Elemente der Ordnung stets gleichgrofs anzunehmen sind. In gleicher Weise verfährt man mit jedem folgenden Paare.

Siehe die folgende Aufgabe!

6. Aufgabe. Ein Kanal wird von 1500 Arbeitern in 840 Tagen 12500 m lang, 6 m tief, 20 m breit gegraben. Wie lange werden 1750 Arbeiter mit einem andern Kanal zubringen, wenn sie denselben 14000 m lang, $7\frac{1}{2}$ m tief und $18\frac{3}{4}$ m breit graben wollen und die Bodenhärte bei jenem $1\frac{1}{6}$mal so grofs ist, als bei diesem?

Auflösung.

Ordnung:	1500 Arb.	840 Tge.	12500 m l.	6 m t.	20 m br.	$1\frac{1}{6}$ Härte
	1750 „	? „	14000 „	$7\frac{1}{2}$ „	$18\frac{3}{4}$ „	1 „

Die gesuchte Gröfse ist zunächst $= \frac{840 \cdot \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ Tge.

1. Frage. 1500 Arbeiter brauchen 840 Tge.; wie viel Tage 1750 Arb. (wenn die Länge dieselbe, die Tiefe dieselbe u. s. w.)?

Antwort: Weniger Tage! Folglich mufs die gröfsere Zahl dividieren, die kleinere multiplicieren, und es ist bis jetzt die gesuchte Gröfse $= \frac{840 \cdot 1500 \cdot \ldots\ldots}{1750 \cdot \ldots\ldots}$ Tage.

2. Frage. Bei 12500 m Länge braucht man 840 (richtiger: eine gewisse Anzahl) Tage, wie viel bei 14000 m Länge (wenn die Arbeiterzahl dieselbe, die Tiefe dieselbe u. s. w.)?

Antwort. Mehr Tage! Folglich ist mit 14000 zu multiplicieren und durch 12500 zu dividieren, und es ist bis jetzt die gesuchte Gröfse $= \frac{840 \cdot 1500 \cdot 14000}{1750 \cdot 12500}$ Tage.

3. Frage. Bei 6 m Tiefe eine gewisse Zeit, wie viel bei $7\frac{1}{2}$ m Tiefe?

Antwort. Mehr Zeit! Daher mit $7\frac{1}{2}$ zu multiplicieren und durch 6 zu dividieren.

Gesuchte Gröfse $= \frac{840 \cdot 1500 \cdot 14000 \cdot 7\frac{1}{2}}{1750 \cdot 12500 \cdot 6}$ Tage.

4. Frage. Bei 20 m Breite eine gewisse Zeit, wie viel bei $18\frac{3}{4}$ Breite?

Antwort. Weniger Zeit.

Gesuchte Gröfse $= \frac{840 \cdot 1500 \cdot 14000 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 18\frac{3}{4}}{1750 \cdot 12500 \cdot 6 \cdot 20}$ Tage.

5. Frage. Bei $1\frac{1}{6}$ Härte eine gewisse Zeit, wie viel bei 1 Härte (wenn die Arbeiterzahl dieselbe u. s. w.)?

Antwort. Weniger Zeit.

Daher die durch die Aufgabe gesuchte Gröfse:

$$= \frac{840 \cdot 1500 \cdot 14000 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 18\frac{3}{4} \cdot 1}{1750 \cdot 12500 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 1\frac{1}{6}} \text{ Tage}$$

$$= \frac{840 \cdot 1500 \cdot 14000 \cdot 15 \cdot 75 \cdot 6}{1750 \cdot 12500 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 7} \text{ Tage.}$$

Noch gekürzt (die 4 Nullen im Nenner und die 4 Nullen von 840 und 14000 gestrichen, 14 und $2 \cdot 7$ gestrichen, 175 und 75 durch 25 gekürzt u. s. w.):

$= 810$ Tage.

6. Teilung nach gegebenen Verhältniszahlen. (Gesellschaftsrechnung, Repartitionsrechnung).

1. Aufgabe. *A*, *B* und *C* nehmen ein Lotterielos, *A* giebt 8 *M.*, *B* 5 *M.*, *C* 3 *M.* Sie gewinnen 1720 *M.* Wie viel bekommt Jeder?

Auflösung. Bekommt *A* 8, *B* 5, *C* 3 *M.*, so bekommen sie zusammen 16 *M.* Folglich bekommt von je 16 *M.* *A* 8, *B* 5, *C* 3 *M.*, oder (durch 16 dividiert)

von je 1 *M.*: $A\,\frac{8}{16}$, $B\,\frac{5}{16}$, $C\,\frac{3}{16}$, daher

von 1720 „ : $A\,\frac{8}{16} \cdot 1720$, $B\,\frac{5}{16} \cdot 1720$, $C\,\frac{3}{16} \cdot 1720$ *M.*

Oder A bekommt $\frac{1720}{16}\cdot 8$, B $\frac{1720}{16}\cdot 5$, C $\frac{1720}{16}\cdot 3$ ℳ,

„ A „ $\frac{1720}{8+5+3}\cdot 8$, B $\frac{1720}{8+5+3}\cdot 5$,

C $\frac{1720}{8+5+3}\cdot 3$ ℳ.

Hieraus ergiebt sich folgende Regel:

Um irgend einen Anteil der Summe zu erhalten, dividiert man die zu teilende Summe durch die Summe der gegebenen Verhältniszahlen und multipliciert den Quotient mit der jenem Anteil entsprechenden Verhältniszahl.

Man rechnet dies abgekürzt in folgender Weise:

$$\begin{array}{c} 8 \\ 5 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$1720 \text{ ℳ} : 16 = 107\tfrac{1}{2} \text{ ℳ}$$

$$\begin{array}{lll} A \text{ erhält} & 107\tfrac{1}{2} \text{ ℳ} \cdot 8 = 860 & \text{ℳ} \\ B \quad „ & 107\tfrac{1}{2} \text{ „} \cdot 5 = 537\tfrac{1}{2} & \text{„} \\ C \quad „ & 107\tfrac{1}{2} \text{ „} \cdot 3 = 322\tfrac{1}{2} & \text{„} \end{array}$$

2. Aufgabe. A fährt $4\frac{1}{5}$ Meilen, B $2\frac{1}{10}$ Meilen, C $1\frac{13}{15}$ Meilen. Sie haben zusammen 2 ℳ 40 ₰ zu bezahlen. Wie viel Jeder?

Auflösung. Bezahlte A das 30fache von $4\frac{1}{5}$, so müſste B das 30fache von $2\frac{1}{10}$, C das 30fache von $1\frac{13}{15}$ bezahlen. Hieraus folgt, daſs man die gegebenen Verhältniszahlen mit einer beliebigen Zahl multiplicieren kann. Würde aber A den 7. Teil von $4\frac{1}{5}$ zu bezahlen haben, so müſsten auch B und C den 7. Teil von $2\frac{1}{10}$, resp. $1\frac{13}{15}$ bezahlen. Hieraus folgt, daſs man die Verhältniszahlen auch durch eine beliebige Zahl dividieren kann. Man wird also die Verhältniszahlen, um sie in die kleinsten ganzen Zahlen zu verwandeln, mit dem Generalnenner multiplicieren, wenn sie gebrochen sein sollten, und durch das gemeinsame Maſs dividieren, wenn sie ein solches (> 1) enthalten.

Anstatt $4\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{10}$, $1\frac{13}{15}$ wird man (mit 30 multipliciert)
setzen: 126, 63, 56 und dafür (durch 7 dividiert).
18, 9, 8.

Die abgekürzte Rechnung ist daher folgende:

$$\begin{array}{c|c|c} & \cdot 30 & :7 \\ 4\frac{1}{5} & 126 & 18 \\ 2\frac{1}{10} & 63 & 9 \\ 1\frac{13}{15} & 56 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$240 \text{ ₰} : 35 = 6\tfrac{6}{7} \text{ ₰}.$$

A giebt daher $6\frac{6}{7}$ ₰ $\cdot 18 = 123\frac{3}{7}$ ₰
B „ $6\frac{6}{7}$ „ $\cdot 9 = 61\frac{5}{7}$ „
C „ $6\frac{6}{7}$ „ $\cdot 8 = 54\frac{6}{7}$ „

3. Aufgabe. A, B und C teilen sich in eine Summe. A bekam $\frac{2}{9}$ davon und 300 ℳ, B $\frac{3}{10}$ davon und 200 ℳ. C erhielt 1650 ℳ. Wie viel erhielten A und B und wie grofs war die Summe?

Auflösung. Teilten sich N und P in eine Summe, von welcher N $\frac{2}{3}$ und aufserdem 100 ℳ, P aber 700 ℳ erhielten, so müfste offenbar 100 ℳ + 700 ℳ das fehlende $\frac{1}{3}$, d. h. das sein, was an der Einheit fehlt. In unserer Aufgabe ist

$$\frac{2}{9} + \frac{3}{10} = \frac{47}{90},$$

folglich fehlen an der Einheit $\frac{43}{90}$. Mithin mufs

$$\frac{43}{90} \text{ der zu teilenden Summe } = 300 + 200 + 1650$$
$$= 2150 \text{ ℳ sein. (Durch 43 div.:)}$$

Der 90[te] Teil der Summe $= \frac{2150}{43}$ ℳ, (mit 90 multipl.)

die Summe selbst $= \frac{2150 \cdot 90}{43} = 4500$ ℳ

A erhielt also $\frac{2}{9} \cdot 4500 + 300 = 1300$ ℳ

B „ $\frac{3}{10} \cdot 4500 + 200 = 1550$ „

4. Aufgabe. N hinterliefs seinen 4 Söhnen 16200 ℳ und hatte bestimmt, dafs A $\frac{1}{3}$ davon und 400 ℳ, B $\frac{1}{4}$ und 500 ℳ, C $\frac{1}{5}$ und 600 ℳ, D $\frac{1}{6}$ und 700 ℳ bekommen sollten. Wie viel erhielt Jeder?

Auflösung. Wollte man hier dem A $\frac{1}{3} \cdot 16200$ ℳ + 300 ℳ, dem B $\frac{1}{4} \cdot 16200$ ℳ + 400 ℳ u. s. w. geben, so würde die Summe 16200 ℳ nicht genau aufgehen, folglich ist zuerst dem A die Summe von 400 ℳ, B 500 ℳ, C 600 ℳ, D 700 ℳ zu geben, der Rest von

16200 — 400 — 500 — 600 — 700 = 14000 ℳ aber nach den Verhältniszahlen $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ zu teilen.

Daher:

	·60
$\frac{1}{3}$	20
$\frac{1}{4}$	15
$\frac{1}{5}$	12
$\frac{1}{6}$	10

14000 ℳ : 57 = $245\frac{35}{57}$ ℳ

Folglich erhält A noch $245\frac{35}{57}$ ℳ · 20 = $4912\frac{16}{57}$ ℳ,
B „ $245\frac{35}{57}$ ℳ · 15.

Da 15 um den 4. Teil kleiner als 20, so erhält
B $4912\frac{16}{57}$ — ($4912\frac{16}{57}$: 4).

D würde halb so viel als A erhalten, da seine Verhältniszahl (10) die Hälfte derjenigen des A ist.

5. Aufgabe. A eröffnet am 1. Januar mit 3500 ℳ ein Geschäft, am 1. April tritt B mit 2400 ℳ, am 1. Juni C mit 4800 ℳ hinzu. Nach Jahresschlufs betrug der reine Gewinn 1700 ℳ Wie viel erhält Jeder?

Auflösung. Das Geld des A steht 12 Monate, des B 9 Monate, des C 7 Monate.

3500 ℳ gewinnen in 12 Monaten eben so viel, als 3500 · 12 ℳ in 1 Monat; 2400 ℳ gewinnen in 9 Monaten eben so viel, als 2400 · 9 in 1 Monat u. s. w. Mithin sind die 1700 ℳ nach den Verhältniszahlen 3500 · 12, 2400 · 9, 4800 · 7 zu teilen. Folglich:

	:100	:12
3500 · 12	35 · 12	35 = 35
2400 · 9	24 · 9	2 · 9 = 18
4800 · 7	48 · 7	4 · 7 = 28

1700 ℳ : 81 = 20,9877 ℳ

A erhält daher 20,9877 ℳ · 35
B „ 20,9877 ℳ · 18
C „ 20,9877 ℳ · 28 (oder $\frac{4}{5}$ dessen, was A erhält).

Anmerkung. Entstehen, wie im vorstehenden Beispiele, die Verhältniszahlen, nach welchen geteilt werden mufs, durch Mul-

tiplication gegebener Zahlen, so nennt man diese Rechnung: „Zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung“.

7. Mischungsaufgaben.

1. Aufgabe. *A* will aus 3 Sorten Spiritus durch Mischung eine Sorte herstellen, und zwar nimmt er hierzu 7 Liter à 65 ₰, 5 Liter à 72 ₰, 11 Liter à 80 ₰. Wie viel kostet 1 Liter der Mischung?

Auflösung. Jene 7 Liter kosten $7 \cdot 65 = 455$ ₰
„ 5 „ „ $5 \cdot 72 = 360$ „
„ 11 „ „ $11 \cdot 80 = 880$ „

Die 23 Liter kosten daher 1695 ₰, folglich

$$1 \text{ Liter} = \frac{1695}{23} = 73\tfrac{16}{23} \text{ ₰},$$

2. Aufgabe. *B* besitzt 2 Sorten Wein, das Liter zu 220 und 300 ₰. Wie viel nimmt er von jeder Sorte, um eine Mischung herzustellen, von welcher 1 Liter 250 ₰ kostet?

Auflösung. Jedes Liter der ersten Sorte kostet 30 ₰ zu wenig, jedes Liter der 2. Sorte 50 ₰ zu viel. Nimmt man daher von der 1. Sorte 50 Liter, von der 2. Sorte 30 Liter, so würde jene Sorte $30 \cdot 50$ ₰ weniger als die gesuchte Sorte und letztere $50 \cdot 30$ ₰, also gleichviel mehr als die gesuchte Sorte kosten und mithin würde durch Vereinigung beider Quantitäten das Zuwenig mit dem Zuviel ausgeglichen sein. Man rechnet daher:

					:10
	220	30 zu wenig	50 Liter		5 Liter
250				oder	
	300	50 zu viel	30 Liter		3 Liter.

Von der 1. Sorte (zu 220 ₰) sind also 5 Liter, von der 2. 3 Liter zu nehmen.

Probe: 5 Liter à 2,2 ℳ = 11 ℳ
3 „ à 3 „ = 9 „

8 Liter kosten daher 20 ℳ, folglich
1 Liter = $2\frac{1}{2}$ ℳ

Benutzt man also die Differenz, welche das für die Einheit berechnete Zuviel angiebt, als Quantität für die schlechtere Sorte, und die Differenz, welche das Zuwenig angiebt, als Quantität für die bessere Sorte, so müssen diese Quantitäten (oder auch beliebige Vielfache oder Teile derselben) die gesuchten sein.

Bei mehreren Sorten (s. folgende Aufg.) würde man gleichfalls darauf zu sehen haben, dafs die Produkte auf der einen Seite so grofs als auf der andern werden.

3. Aufgabe. *A* hat 4 Sorten Mehl, den Centner zu 20, $21\frac{1}{2}$, $22\frac{3}{4}$ und $23\frac{1}{5}$ *M.* Er will durch Mischung eine Sorte zu $22\frac{1}{4}$ *M.* herstellen. Wie viel Centner nimmt er von jeder Sorte?

			· 20	
20	$2\frac{1}{4}$ zu wenig	$\frac{1}{2}$ Ctr.	10 Ctr.	$2\frac{1}{4}$ mit $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ " $\frac{19}{20}$ vertauscht!
$21\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$ " "	$\frac{19}{20}$ "	19 "	
$22\frac{1}{4}$ —				
$22\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$ zu viel	$2\frac{1}{4}$ "	45 "	
$23\frac{1}{5}$	$\frac{19}{20}$ " "	$\frac{3}{4}$ "	15 "	

Denn $2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{19}{20}$ Ctr. zu wenig und $\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{4}=\frac{19}{20}\cdot\frac{3}{4}$ Ctr.

also Dasselbe, zu viel! Oder auch:

20	$2\frac{1}{4}$ zu wenig	$\frac{19}{20}$ Ctr.	$2\frac{1}{4}$ mit $\frac{19}{20}$, $\frac{3}{4}$ " $\frac{1}{2}$ vertauscht!
$21\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$ " "	$\frac{1}{2}$ "	
$22\frac{1}{4}$ —			
$22\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$ " viel	$\frac{3}{4}$ "	
$23\frac{1}{5}$	$\frac{19}{20}$ " "	$2\frac{1}{4}$ "	

4. Aufgabe. Aus 5 Sorten, den Centner zu 18, 22, 27, 30, 33 *M.* soll eine Sorte zu 25 *M.* gemischt werden. Wie viel ist von jeder Sorte zu nehmen?

18	7 zu wenig	8 + 2 Ctr.	Denn hier ist z. B. $7\cdot(8+2)$ *M.* $=7\cdot 8+7\cdot 2$ *M.* zu wenig und $2\cdot 7+8\cdot 7$ *M.* zu viel, folglich gleichen sich beide aus.
22	3 " "	5 Ctr.	
25 —			
27	2 zu viel	7 "	
30	5 " "	3 "	
33	8 " "	7 "	

Aber auch ganz beliebige Quantitäten würde man nehmen können, wenn man darauf sieht, daſs die Produkte aus den Differenzen der schlechtern Sorten eben so groſs werden, als die Produkte aus den Differenzen der bessern Sorten.

Beispiel.	18	7 zu wenig	beliebig 4 ℔
	22	3 „ „	?
25			
	30	5 „ viel	beliebig 9 ℔ angenommen.

Nun soll $7 \cdot 4 + 3$mal eine unbekannte Zahl eben so grofs als $5 \cdot 9$ sein, d. i.

$$28 + 3\text{mal eine unbekannte Zahl} = 45.$$

Folglich das 3fache der unbekannten Zahl $= 17$ (§. 8, 1, Zus.)
und die unbekannte Zahl selbst $= 5\frac{2}{3}$ ℔. (12, 1, Zus.)

Man nimmt also 4 ℔ von der ersten Sorte, $5\frac{2}{3}$ ℔ von der 2., 9 ℔ von der 3. Sorte.

8. Procentrechnungen.

I. Zuweilen giebt man an, wie viel Einheiten einer Gröfse zu 100 Einheiten einer andern Gröfse gehören und nennt jene: Procente (oder Percente), abgekürzt mit $^0/_0$.

Beispiel. N hat 46000 ℳ hinterlassen, wovon A $8\frac{1}{3}\,^0/_0$ ($8\frac{1}{3}$ Procent) bekommen soll. Wie viel beträgt dies?

Auflösung. Da $8\frac{1}{3}\,^0/_0$ bedeutet, dafs A von je 100 ℳ : $8\frac{1}{3}$ ℳ bekommen soll, so bekommt er (durch 100 dividiert)

$$\text{von je } 1 \text{ ℳ} : \frac{8\frac{1}{3}}{100} \text{ ℳ}$$

und (mit 46000 multipliciert)

$$\text{von } 46000 \text{ ℳ} : \frac{8\frac{1}{3} \cdot 46000}{100} \text{ ℳ}$$

$$A \text{ bekommt also } \frac{25 \cdot 46000}{3 \cdot 100} = 3833\tfrac{1}{3} \text{ ℳ}$$

Die unbenannte Zahl, welche die Anzahl der $^0/_0$ angiebt, ($8\frac{1}{3}$ in vorstehendem Beispiel) nennt man Procentsatz (Procentfufs).

II. Kauft Jemand für 100 ℳ Waren ein und verkauft sie für 118 ℳ wieder, so hat er an 100 : 18 ℳ gewonnen, der Gewinn beträgt mithin 18 $^0/_0$.

1. Aufgabe. Ist die Einkaufssumme 3750 ℳ, die Verkaufssumme 3920 ℳ und soll der Gewinn nach $^0/_0$ bestimmt werden, so mufs die Einkaufssumme auf 100 gebracht werden. Daher:

Einkaufssumme.	Verkaufssumme.	
3750 ℳ	3920 ℳ	(durch 3750 dividiert)
1	$\frac{3920}{3750}$	(mit 100 multipliciert)
100	$\frac{392000}{3750} = 104\frac{8}{15}$.	

Mithin ist an 100 : $4\frac{8}{15}$ gewonnen worden oder der Gewinn beträgt $4\frac{8}{15}\,^0/_0$.

2. Aufgabe. Es sei die Einkaufssumme 625 Frcs., die Verkaufssumme 581 Frcs. Wie viel % beträgt der Verlust?

Einkaufss.	Verkaufss.	
625 Frcs.	581 Frcs.	(durch 625 divid.)
1	$\frac{581}{625}$	(mit 100 multipl.)
100	$\frac{58100}{625} = 92{,}96.$	

An 100 Frcs. wurden mithin 7,04 Frcs. verloren oder der Verlust betrug 7,04 %.

3. Aufgabe. N kauft $3\frac{1}{2}$ Ctr. für 510 ℳ. Wie teuer muſs er $2\frac{3}{4}$ ℔ verkaufen, wenn er 20 % gewinnen will?

Auflösung.

Im Einkaufe kosten $3\frac{1}{2}$ Ctr. : 510 ℳ,

$$\text{daher } 1 \text{ - } : \frac{510}{3\frac{1}{2}} \text{ -}$$

$$\text{d. i. } 100 \text{ ℔ } : \frac{510}{3\frac{1}{2}} \text{ -}$$

$$1 \text{ - } : \frac{510}{3\frac{1}{2} \cdot 100} \text{ ℳ},$$

$$2\frac{3}{4} \text{ - } : \frac{510 \cdot 2\frac{3}{4}}{3\frac{1}{2} \cdot 100} \text{ - } = \frac{510 \cdot 11 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 100} \text{ ℳ}$$

Folglich:

Einkaufss.	Verkaufss.	
100	120	(s. Aufg. — durch 100 div.)
1	$\frac{120}{100}$	(mit $\frac{510 \cdot 11 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 100}$ mult.)
$\frac{510 \cdot 11 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 100}$ ℳ	$\frac{120}{100} \cdot \frac{510 \cdot 11 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 100}$ ℳ	

$2\frac{3}{4}$ ℔ kosten also im Einkaufe $\frac{510 \cdot 11 \cdot 2}{4 \cdot 7 \cdot 100}$, im Verkaufe $\frac{120 \cdot 510 \cdot 11 \cdot 2}{100 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 100} = \frac{1683}{350} = 4{,}81$ ℳ

4. Aufgabe. S kauft $4\frac{1}{2}$ ℔ für 13 ℳ 50 ₰. Er verkauft $6\frac{4}{5}$ ℔ für 19 ℳ 60 ₰. Wie viel % hat er gewonnen oder verloren?

Auflösung.

Im Einkaufe kosten $4\frac{1}{2}$ ℔ : 13.50 ℳ,

$$\text{folglich } 1 \text{ - } : \frac{13.5}{4\frac{1}{2}} \text{ -}\,,$$

$$6\frac{4}{5} \text{ - } : \frac{13.5 \cdot 6\frac{4}{5}}{4\frac{1}{2}} = \frac{13.5 \cdot 34 \cdot 2}{5 \cdot 9} \text{ ℳ}$$

Für $6\frac{4}{5}$ Ztr. beträgt daher der

Einkaufspreis	Verkaufspreis	
$\frac{13.5 \cdot 34 \cdot 2}{5 \cdot 9}$ ℳ	19,6 ℳ;	(durch $\frac{13.5 \cdot 34 \cdot 2}{5 \cdot 9}$ div.)
1 „	$\frac{19.6 \cdot 5 \cdot 9}{13,5 \cdot 34 \cdot 2}$ ℳ	
100 „	$\frac{19,6 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 100}{13,5 \cdot 34 \cdot 2} = \frac{196 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 100}{135 \cdot 34 \cdot 2}$	
	$= 96{,}08$ ℳ	

An 100 ℳ hat *S* mithin $100 - 96{,}08 = 3{,}92$ verloren. oder der Verlust betrug 3,92 %.

III. Bei Zahlungen für Waren wird oft ein **Rabatt**, d. i. ein Abzug gewährt, der gleichfalls nach % gerechnet wird.

Beispiel. *A* nimmt für 2784 ℳ 30 kg Waren und erhält bei sofortiger Bezahlung $6\frac{2}{3}$ % Rabatt. Wie viel bezahlt er?

Auflösung. Statt 100 ℳ bezahlt er $93\frac{1}{3}$.

„ 1 „	: $\frac{93\frac{1}{3}}{100}$,
„ 2784,3	: $\frac{93\frac{1}{3} \cdot 2784{,}3}{100}$ oder

$$\frac{280 \cdot 2784{,}3}{3 \cdot 100} = \frac{28 \cdot 278{,}43}{3} = 28 \cdot 92{,}81 = 2598{,}68 \text{ ℳ}$$

IV. **Aufgabe.** *A* vermehrte sein Kapital um $7\frac{1}{2}$ % und es wuchs damit auf 14405 ℳ an. Um wie viel wurde das ursprüngliche Kapital vermehrt?

Auflösung. Wäre das Kapital 100 gewesen, so würde die Vermehrung $7\frac{1}{2}$ betragen haben und das Kapital würde auf $107\frac{1}{2}$ angewachsen sein.

Folglich:

Angewachs. Kap.	Vermehr. des urspr. Kap.	
$107\frac{1}{2}$ ℳ	$7\frac{1}{2}$	(durch $107\frac{1}{2}$ dividiert)
1 „	$\frac{7\frac{1}{2}}{107\frac{1}{2}}$	(mit 14405 multipliciert)
14405 „	$\frac{7\frac{1}{2} \cdot 14405}{107\frac{1}{2}}$ ℳ	

Die gesuchte Vermehrung betrug also

$$\frac{7\frac{1}{2} \cdot 14405}{107\frac{1}{2}} = \frac{15 \cdot 14405}{215} = 1005 \text{ ℳ}$$

Anmerkung. Man unterscheidet 6 % von 100, 6 % auf 100, 6 % in 100, je nachdem 100 : 6, oder 106 : 6, oder 94 : 6 giebt. Dieser Unterschied ist

jedoch unlogisch und es hat nur die 1. Art von Procenten Berechtigung. In der letzten Aufgabe z. B. sind nur scheinbar „% auf 100“ vorhanden, denn die Aufgabe nahm dort nicht an, dafs $107\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$, sondern $100 : 7\frac{1}{2}$ giebt und eben darum wuchs 100 auf $107\frac{1}{2}$ an.

V. Steht ein Wertpapier 94 %, so meint man damit, dafs es zwar ursprünglich über 100 oder $2 \cdot 100$ u. s. w. lautete, jetzt aber nur noch den baren Wert von 94 oder $2 \cdot 94$ u. s. w. hat.

VI. Wie sich % auf 100 beziehen, so bezieht sich der Ausdruck „pro mille“, abgekürzt mit ‰, auf 1000.

Beispiel. Vom Kapital 4560 ℳ bekommt N $2\frac{1}{2}$ ‰.
Folglich: Von 1000 ℳ bekommt er $2\frac{1}{2}$,

„ 1 „ „ „ $\frac{2\frac{1}{2}}{1000}$,

„ 4560 „ „ „ $\frac{2\frac{1}{2} \cdot 4560}{1000} = \frac{5 \cdot 4560}{2 \cdot 1000}$

$= 11{,}4$ ℳ.

9. Zinsrechnung.

A leiht dem B ein Kapital (Geldsumme) oder irgend ein Wertstück (z. B. Grundstück). Die Geldsumme, welche B dem A für die Benutzung dieses Kapitals (resp. Wertstückes) zahlt, nennt man „Zins“. Der für die Berechnung der Zinsen gegebene Procentsatz wird auch Zinsfufs genannt und gilt stets für ein Jahr. Wird daher ein Kapital zu 5 % ausgeliehen, so versteht man darunter, dafs für je 100 ℳ des Kapitals in einem Jahre 5 ℳ Zinsen (oder Interessen) gezahlt werden. Der Monat wird hierbei zu 30 Tagen, das Jahr also zu 360 Tagen gerechnet, in England und Nordamerika und in einzelnen Fällen auch in Deutschland: 1 Jahr zu 365 Tagen. Ist ein Zinsfufs nicht angegeben, so wird ein gerichtlicher Zinsfufs von 5 % (in besondern Fällen auch mehr oder weniger) angenommen.

I. Berechnung der Zinsen.

1. Aufgabe. Wie viel Zinsen geben 7000 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ % in $3\frac{2}{3}$ Jahren?

Auflösung.
Das Kapital 100 ℳ giebt in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen,

„ „ 100 „ „ „ $3\frac{2}{3}$ „ $3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen,

„ „ 1 „ „ „ $3\frac{2}{3}$ „ $\frac{3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}}{100}$ „ „

„ „ 7000 „ „ „ $3\frac{2}{3}$ „ $\frac{7000 \cdot 3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}}{100}$ ℳ Zinsen.

Wäre das Kapital 850 ℳ, die Zeit $1\frac{5}{6}$ Jahr, der Zinsfufs $5\frac{3}{4}$ %, so würde man in gleicher Weise für die Zinsen:

$\frac{850 \cdot 1\frac{5}{6} \cdot 5\frac{3}{4}}{100}$ ℳ erhalten haben.

Hieraus folgt die allgemeine Regel:

Die Zinsen erhält man, wenn man das Kapital mit der Zeit (in Jahren) und mit dem Zinsfuſse multipliciert und das Produkt durch 100 dividiert. Oder:

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Jahre} \times \text{Procente}}{100}. \qquad (\text{Z.})$$

Ist das Kapital $= K$, die Jahre $= a$ (*anni!*), die Procente $= p$, die Zinsen $= z$, so ist:

$$z = \frac{kap}{100}.$$ (*kap* die 3 ersten Buchstaben des Wortes „Kapital".)

Die obige Aufgabe giebt also:

$$\text{Zinsen} = \frac{7000 \cdot 3\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}}{100} = \frac{7000 \cdot 11 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 100} = 1155 \text{ M.}$$

2. Aufgabe. Wie viel Zinsen geben $907\frac{1}{2}$ M. in 1 Jahr 9 Mon. 20 Tagen zu $3\frac{1}{5}$ %.

Auflösung. Zunächst hat man hier 1 Jahr $9\frac{2}{3}$ Mon. = 1 Jahr $+ \frac{9\frac{2}{3}}{12}$ Jahr $= 1\frac{29}{36}$ Jahr. Daher nach Z:

$$\text{Zinsen} = \frac{907\frac{1}{2} \cdot 1\frac{29}{36} \cdot 3\frac{1}{5}}{100} = \frac{1815 \cdot 65 \cdot 19}{2 \cdot 36 \cdot 5 \cdot 100} = 62{,}2646 \text{ M.}$$
$$= 62 \text{ M. } 26 \text{ ₰.}$$

3. Aufgabe. Wie viel Zinsen geben 48600 M. zu $5\frac{2}{3}$ % in 7 Mon. 18 Tagen?

Auflösung.

$$7 \text{ Mon. } 18 \text{ Tge.} = 7\tfrac{18}{30} \text{ Mon.} = 7\tfrac{3}{5} \text{ Mon.} = \frac{7\frac{3}{5}}{12} \text{ Jahr.}$$

$$\text{Daher: Zinsen} = \frac{48600 \cdot \frac{7\frac{3}{5}}{12} \cdot 5\frac{2}{3}}{100}, \text{ d. i.}$$

$$= \frac{48600 \cdot 7\frac{3}{5} \cdot 5\frac{2}{3}}{12 \cdot 100} \text{ M.}$$

Hieraus folgt, daſs man in dem Quotient an die Stelle der Jahre : Monate setzen kann, wenn man den Nenner 12 in den andern Hauptteil des Bruches (in den Hauptnenner) setzt.

Vorstehender Ausdruck giebt

$$\text{die Zinsen} = \frac{48600 \cdot 38 \cdot 17}{12 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 100} = 1744{,}2 \text{ M.}$$

II. Berechnung des Kapitals.

Wie groſs ist ein Kapital, welches in 7 Jahren zu $4\frac{1}{2}$ % 315 M. Zinsen bringt?

Auflösung. Das Kapital 100 ℳ giebt in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen.

Ist die Zeit 7mal so grofs, so mufs das Kapital 7mal so klein sein, wenn die Zinsen dieselben (hier $4\frac{1}{2}$) bleiben sollen. Daher:

Kap. $\frac{100}{7}$ ℳ giebt in 7 Jahren $4\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen.

Kap. $\frac{100}{7 \cdot 4\frac{1}{2}}$ „ „ „ 7 „ 1 „ „

Kap. $\frac{100 \cdot 315}{7 \cdot 4\frac{1}{2}}$ „ „ „ 7 „ 315 „ „

Das gesuchte Kapital ist also hier $\frac{100 \cdot 315}{7 \cdot 4\frac{1}{2}}$ und würde z. B. bei 6 %, 3 Jahren und 49 ℳ Zinsen in $\frac{100 \cdot 49}{3 \cdot 6}$ übergehen.

Folglich ist immer:

$$\text{Kapital} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Jahre} \times \text{Procente}}. \qquad \text{(K.)}$$

Anmerkung. Durch spätere Sätze läfst sich weit einfacher k und jedes andere Element aus dem schon bekannten Ausdrucke $z = \frac{kap}{100}$ ableiten.

Für vorstehende Aufgabe ist also:

$$\text{das Kapital} = \frac{100 \cdot 315 \cdot 2}{7 \cdot 9} = 1000 \text{ ℳ}$$

2. Aufgabe. Wie grofs ist ein Kapital, welches in 5 Mon. 25 Tagen zu $3\frac{3}{4}$ % 8 ℳ 40 ₰ Zinsen bringt?

Auflösung.

$$5 \text{ Mon. } 25 \text{ Tge.} = 5\tfrac{5}{6} \text{ Mon.} = \frac{5\frac{5}{6}}{12} \text{ Jahr} = \frac{35}{6 \cdot 12} \text{ Jahr},$$

8 ℳ 40 ₰ = 8,4 ℳ Daher nach K:

$$\text{Kap.} = \frac{100 \cdot 8{,}4}{\frac{35}{6 \cdot 12} \cdot 3\frac{3}{4}} \text{ (s. §. 42, 1)} = \frac{100 \cdot 84 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4}{10 \cdot 35 \cdot 15} = 460{,}8 \text{ ℳ}$$

III. Berechnung des Zinsfufses.

1. Aufgabe. Zu wie viel % sind 475 ℳ ausgeliehen, wenn sie in $6\frac{3}{4}$ Jahren 171 ℳ Zinsen bringen?

Auflösung.

Kap. 475 ℳ in $6\frac{3}{4}$ Jahren 171 ℳ Zinsen,

„ 1 „ „ $6\frac{3}{4}$ „ $\frac{171}{475}$ „ „

Kap. 100 ℳ in $6\frac{3}{4}$ Jahren $\frac{171 \cdot 100}{475}$ ℳ Zinsen,

" 100 " " 1 " $\frac{171 \cdot 100}{475 \cdot 6\frac{3}{4}}$ " "

Wenn aber das Kapital 100 ℳ in 1 Jahr $\frac{171 \cdot 100}{475 \cdot 6\frac{3}{4}}$ ℳ Zinsen bringt, so ist dieser Quotient offenbar der Zinsfufs. Die Form desselben würde bei andern gegebenen Zahlen dieselbe bleiben.

Daher sind stets die Procente $= \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Kapital} \times \text{Jahre}}$. (P)

Für vorstehende Aufgabe erhält man $\frac{171 \cdot 100 \cdot 4}{475 \cdot 27} = 5\frac{1}{3}\,\%$.

2. Aufgabe. Ein Wucherer verlangte für 175 ℳ in $2\frac{1}{2}$ Mon. 42 ℳ Zinsen. Welchen Zinsfufs hatte der Menschenfreund?

Auflösung.

$$\text{P giebt} = \frac{42 \cdot 100}{175 \cdot \frac{2\frac{1}{2}}{12}} = \frac{42 \cdot 100 \cdot 12}{175 \cdot 2\frac{1}{2}} = \frac{42 \cdot 100 \cdot 12 \cdot 2}{175 \cdot 5} = 115\frac{1}{5}\,\%.$$

IV. Berechnung der Zeit.

1. Aufgabe. In wie viel Jahren geben 640 ℳ zu $5\frac{1}{2}\,\%$ 88 ℳ Zinsen?

Auflösung. Kap. 100 in 1 Jahre $5\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen.

Ist das Kapital 100mal so klein, so mufs die Zeit 100mal so grofs sein, wenn die Zinsen dieselben ($5\frac{1}{2}$ ℳ) bleiben sollen.

Daher: Kap. 1 in 100 Jahren $5\frac{1}{2}$ ℳ Zinsen,

" 640 " $\frac{100}{640}$ " $5\frac{1}{2}$ " "

" 640 " $\frac{100}{640 \cdot 5\frac{1}{2}}$ " 1 " "

" 640 " $\frac{88 \cdot 100}{640 \cdot 5\frac{1}{2}}$ " 88 " "

Die gesuchten Jahre sind hier $\frac{88 \cdot 100}{640 \cdot 5\frac{1}{2}}$. Wären andere Zahlen gegeben, so würde die Form des Quotient dieselbe bleiben.

Allgemein sind daher:

die Jahre $= \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Kapital} \times \text{Procente}}$. (J)

Vorstehende Aufgabe giebt $\frac{88 \cdot 100 \cdot 2}{640 \cdot 11} = 2\frac{1}{2}$ Jahre.

2. Aufgabe. *A* leiht dem *B* am 26. Nov. 1874 ein Kapital von 5600 *M.* zu $6\frac{2}{3}$ %. An welchem Tage betragen die Zinsen 910 *M.*?

Auflösung. J giebt $\frac{910 \cdot 100}{5600 \cdot 6\frac{2}{3}}$ Jahre $= \frac{910 \cdot 100 \cdot 3}{5600 \cdot 20}$ $= 2\frac{7}{16}$ Jahr $=$ 2 Jahr $5\frac{1}{4}$ Mon. $=$ 2 Jahr 5 Mon. $7\frac{1}{2}$ Tge.

Der Tagesbruch ist noch abzubrechen, da das Abtragen der Zinsen nur an den Tag, aber nicht an eine bestimmte Stunde gebunden ist. Daher: 2 Jahre 5 Mon. 8 Tge.

Die gesuchte Zeit ergiebt sich nun nach §. 49, 6:

1873 Jahr	10 Mon.	25 Tge.	verflossene Zeit.
2 „	5 „	8 „	
1876 Jahr	4 Mon.	3 Tge.	

d. i. 4. Mai 1877.

Anmerkung. Vergleicht man die für das Kapital, die Procente und die Zeit gefundenen Ausdrücke K, P und J, so findet man folgende allgemeine Regel:

> Der Zähler ist stets „100 × Zinsen". Der Nenner erhält das Produkt der bis dahin noch nicht berührten Elemente. Soll z. B. die Zeit (in Jahren) berechnet werden, so ist der Zähler „100 × Zinsen". Da Zeit und Zinsen schon berührt sind, so fehlen noch Kapital und Procente, deren Produkt in den Nenner zu setzen ist. Daher:
>
> $$\text{Jahre} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Kapital} \times \text{Proc.}}.$$

V. Vermehrt man ein Kapital um seine sämtlichen Zinsen, so erhält man das „angewachsene Kapital".

1. Aufgabe. *A* leiht dem *B* 5850 *M.* und erhält nach 8 Mon. 20 Tagen an Kapital und Zinsen 6027,45 *M.* Wie grofs ist der Zinsfufs?

Auflösung. Vermindert man 6027,45 *M.* um das Kapital 5850 *M.*, so erhält man 177,45 *M.* Zinsen. Die Aufgabe verwandelt sich nun in folgende:

> Zu wie viel % sind 5850 *M.* ausgeliehen, wenn sie in $8\frac{2}{3}$ Mon. 177,45 *M.* Zinsen bringen?

Nach P findet man:

$$\frac{177{,}45 \cdot 100 \cdot 12}{5850 \cdot 8\frac{2}{3}} = \frac{17745 \cdot 12 \cdot 3}{5850 \cdot 26} = 4\tfrac{1}{5}\ \%.$$

2. Aufgabe. *N* leiht 380 *M.* zu $3\frac{3}{4}$ %. Nach welcher Zeit würde das angewachsene Kapital 412 *M.* betragen?

Auflösung. Die Zinsen betragen 412 — 380 = 32 *M.* Damit geht die Aufgabe in folgende über:

In welcher Zeit geben 380 ℳ zu $3\frac{3}{4}$ % 32 ℳ Zinsen?

Nach J in: $\frac{32 \cdot 100}{380 \cdot 3\frac{3}{4}}$ Jahr $= \frac{32 \cdot 100 \cdot 4}{380 \cdot 15}$ Jahr

$= 2\frac{14}{57}$ Jahr = 2 Jahre 2 Mon. 28 Tage.

3. Aufgabe. Ein Kapital wuchs in 10 Mon. 20 Tagen zu $6\frac{1}{4}$ % auf 5225 ℳ an? Wie grofs war es?

Man berechne zunächst, auf welche Summe das Kapital 100 in $10\frac{2}{3}$ Mon. zu $6\frac{1}{4}$ % anwächst. Da nun nach P die Zinsen des Kapitals 100 in dieser Zeit

$$= \frac{100 \cdot 10\frac{2}{3} \cdot 6\frac{1}{4}}{12 \cdot 100} = \frac{32 \cdot 25}{3 \cdot 4 \cdot 12} = 5\frac{5}{9}$$

betragen, so wächst also das Kapital 100 in $10\frac{2}{3}$ Mon. zu $6\frac{1}{4}$ % auf $105\frac{5}{9}$ ℳ an.

Die ursprüngliche Aufgabe geht jetzt in folgende über:

Ist das angewachsene Kapital $105\frac{5}{9}$, so ist das ausgeliehene 100. Wie grofs ist das ausgeliehene, wenn das angewachsene 5225 beträgt?

$105\frac{5}{9}$ angew. Kap.		100 ausgel. Kap.	(durch $105\frac{5}{9}$ divid.)
1 „ „		$\frac{100}{105\frac{5}{9}}$	„ „
5255 „ „		$\frac{100 \cdot 5225}{105\frac{5}{9}}$	„ „

Das gesuchte Kapital ist also $\frac{100 \cdot 5225 \cdot 9}{950} = 4950$ ℳ

Anmerkung. Aufgaben folgender Form: „Vermindert man ein Kapital um seine für 20 Tage mit $3\frac{1}{2}$ % berechneten Zinsen, so erhält man 3293,67 ℳ Wie grofs war das Kapital?“ finden in der Discontorechnung (3. Beispiel) Berücksichtigung.

10. Diskontorechnung (Diskont, Sconto).

Diskont ist ein Abzug, der für eine vor dem bestimmten Zahlungstermine geleistete Zahlung bewilligt wird. An manchen Orten wird dieser Abzug auch „Rabatt“ genannt.

Die übliche Berechnungsweise besteht darin, die Zinsen für die betreffende Zeit von dem zu diskontierenden Kapital abzuziehen, um das zu zahlende (das diskontierte) Kapital zu erhalten.

Der Zinsfufs bezieht sich auch hier auf ein Jahr.

1. Beispiel. *N* hat dem *S* am 27. Juni 1883 2860 ℳ zu zahlen. Wie viel beträgt der mit 3 % berechnete Diskont, wenn er die Zahlung schon am 12. Juni leistet?

Auflösung. Da der Diskont (Abzug von der zu zahlenden Summe) den Zinsen für die betreffende Zeit (15 Tage) gleich ist, so beträgt derselbe:

$$\frac{2860 \cdot \frac{15}{365} \cdot 3}{100} = \frac{2860 \cdot 15 \cdot 3}{365 \cdot 100} = 3{,}53 \mathcal{M}.$$

N hat mithin $2860 - 3{,}53 = 2856{,}47$ ℳ. zu zahlen.

2. Beispiel. A hat dem B den 13. Mai 1883 540 ℳ. zu zahlen. Er will die Zahlung aber schon den 22. April 1883, also 21 Tage früher, leisten. Wie viel hat er zu zahlen, wenn ihm 4 % Diskonto bewilligt wird?

Auflösung. Von 540 ℳ. sind die für 21 Tage ($= \frac{21}{365}$ Jahre) mit 4 % berechneten Zinsen abzuziehen. Folglich beträgt das

$$\text{diskontierte Kapital} = 540 - \frac{540 \cdot \frac{21}{365} \cdot 4}{100}$$

$$= 540 - \frac{540 \cdot 21 \cdot 4}{365 \cdot 100}$$

$$= 540 - 1{,}24 = 538{,}76 \mathcal{M}.$$

3. Beispiel. Jemand hatte den 19. Okt. 1882 einen Wechsel zu zahlen. Er zahlte 15 Tage früher, also am 4. Oktober, mit $3\frac{1}{2}$ % Diskonto 7738 ℳ. 85 ₰. Auf welche Summe lautete der Wechsel?

Auflösung. Wenn im 1. Beispiel das zu diskontierende Kapital (540 ℳ.) unbekannt gewesen wäre und aus dem diskontierten Kapital 538,76 ₰ berechnet werden sollte, so müfste, wie sich aus

$$540 - (\text{Zinsen von } 540) = 538{,}76$$

ergiebt, ein Kapital (hier 540) gesucht werden, welches um seine Zinsen vermindert 538,76 ℳ. giebt.

Im vorliegenden Beispiele ist mithin auch ein unbekanntes Kapital (das zu diskontierende) zu suchen, welches um seine für 15 Tage mit $3\frac{1}{2}$ % berechneten Zinsen vermindert, das diskontierte Kapital 7738,85 ℳ. giebt.

Zu diesem Zwecke vermindere man zunächst das Kapital 100 um seine für 15 Tage mit $3\frac{1}{2}$ % berechneten Zinsen. Man findet

$$100 - \frac{100 \cdot \frac{15}{365} \cdot 3\frac{1}{2}}{100} = 100 - \frac{15 \cdot 7}{365 \cdot 2}$$

$$= 100 - 0{,}144 = 99{,}856.$$

Ist also das diskontierte Kapital 99,856, so ist das zu diskontierende 100. Wie grofs mufs das zu diskontierende sein, wenn das diskontierte 7738,85 ℳ. ist?

99,856 M das diskont. Kap. 100 M das zu diskont. Kap.

$$1 \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad \frac{100}{99,856} \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „$$

$$7738,85 \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad \frac{100 \cdot 7738,85}{99,856} \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „$$

Das gesuchte Kapital ist also:

$$= 773885 : 99,856 = 7750 \text{ M}$$

Anmerkung. Diese allgemein übliche Berechnungsweise ist falsch. Denn hätte N dem P am 1. Juli 1883 ein Kapital von 20000 M zu zahlen und soll berechnet werden, wie viel er dafür am 1. April, also 91 Tage früher, mit 6 % Diskonto bezahlt, so würde N nach der üblichen Berechnungsweise

$$20000 - \frac{20000 \cdot \frac{91}{365} \cdot 6}{100} = 19700,822 \text{ M}$$

zu zahlen haben.

Rationell jedoch hätte N am 1. April ein Kapital zu zahlen, welches mit 6 % bis zum 1. Juli auf 20000 M anwächst. Um dies Kapital zu berechnen, wäre zunächst zu untersuchen, wie grofs das Kapital 100 in 91 Tagen zu 6 % wird. Da nun das Kapital 100 in 91 Tagen zu 6 %:

$$\frac{100 \cdot \frac{91}{365} \cdot 6}{100} = 1\tfrac{181}{365} \text{ Zinsen}$$

giebt, so wächst 100 auf $101\frac{181}{365}$ an. Folglich:

$101\frac{181}{365}$ M angew. Kap., 100 M ausgel. Kap.

$$1 \quad „ \quad „ \quad „ \quad \frac{100}{101\frac{181}{365}} \quad „ \quad „ \quad „$$

$$20000 \quad „ \quad „ \quad „ \quad \frac{100 \cdot 20000}{101\frac{181}{365}} \quad „ \quad „ \quad „$$

Das rationell zu zahlende Kapital ist mithin:

$$2000000 : 101\tfrac{181}{365} = 19705,231 \text{ M};$$

denn giebt N dem P am 1. April 19705,23 M und leiht P diese Summe zu 6 % aus, so ist er den 1. Juli im Besitz von genau 20000 M.

11. Terminrechnung.

A mag dem B am 1. Jan. 2000 M, am 1. März 3000 M, am 1. Juli 1600 M zu zahlen haben. Offenbar wird nun A diese 6600 M auch so zahlen können, dafs er z. B. 4000 M am 1. Febr. zahlt und die übrigen 2600 M an einem spätern Termine (Zahlungs-

zeitpunkt), der von der Terminrechnung so zu bestimmen ist, daſs weder A noch B einen Verlust erleidet.

Die Aufgabe der Terminrechnung ist also, für gegebene Termine andere Termine so zu bestimmen, daſs weder der Gläubiger noch der Schuldner dabei zu Schaden kommt.

Im Nachstehenden beschäftigen wir uns nur mit der Berechnung des sogenannten mittlern Termins, d. i. mit dem Bestimmen desjenigen Tages, an welchem mehrere zu verschiedenen Zeiten zahlbare Kapitalien mit einem Male bezahlt werden können, weil Aufgaben, bei denen mehrere veränderte Termine in Frage kommen, rationell nur mit Hilfe der Algebra gelöst werden können.

1. Aufgabe. A hat in 2 Monaten 900, in 4 Monaten 1500, in 7 Monaten 100 ℳ zu zahlen. In wie viel Monaten kann er die $900 + 1500 + 1000 = 3400$ ℳ mit einem Male bezahlen?

Auflösung. 900 ℳ geben in 2 Monaten denselben Gewinn, wie $900 \cdot 2$ ℳ in 1 Monat. Eben so: 1500 ℳ geben in 4 Mon. denselben Gewinn wie $1500 \cdot 4$ ℳ in 1 Mon., und 1000 ℳ in 7 Mon. $= 1000 \cdot 7$ ℳ in 1 Mon.

Werden nun die 3 Kapitalien an einem noch unbekannten Tage zugleich bezahlt, der in x Monaten fallen mag, so hätte man zunächst zu berücksichtigen, daſs

> 900 ℳ in x Mon. denselben Gewinn geben, wie $900 \cdot x$ ℳ in 1 Mon. Eben so: 1500 ℳ in x Mon. $= 1500 \cdot x$ ℳ in 1 Mon. und 1000 ℳ in x Mon. $= 1000 \cdot x$ ℳ in 1 Mon.

Diese x Monate sind offenbar nur dann richtig gewählt, wenn $900 \cdot x + 1500 \cdot x + 1000 \cdot x$ in 1 Mon. denselben Gewinn geben, wie $900 \cdot 2 + 1500 \cdot 4 + 1000 \cdot 7$ in 1 Mon.

Daher ist:

$$900x + 1500x + 1000x = 900 \cdot 2 + 1500 \cdot 4 + 1000 \cdot 7.$$

Dafür kann nach §. 11, 6 geschrieben werden:

$$(900 + 1500 + 1000)x = 900 \cdot 2 + 1500 \cdot 4 + 1000 \cdot 7.$$

Da ferner (nach §. 12, 1, Zus.) das Produkt (hier die rechte Seite der Gleichung) durch den einen Faktor (die Parenthese links) dividiert den andern Faktor (x) geben muſs, so ist:

$$x = \frac{900 \cdot 2 + 1500 \cdot 4 + 1000 \cdot 7}{900 + 1500 + 1000} \text{ Monate.}$$

Allgemein:

> Der mittlere Termin ist gleich der Summe der Produkte der Kapitalien und Zeiten dividiert durch die Summe der Kapitalien.

Für vorstehende Aufgabe fällt mithin der mittlere Termin in

$$\frac{1800 + 6000 + 7000}{3400} = 4\tfrac{6}{17} \text{ Mon.} = 4 \text{ Mon. } 11 \text{ Tagen.}$$

Anmerkung. Geht man von dem Termine aus, an welchem die erste Zahlung von 900 ℳ geschehen sollte, so würde die Aufgabe lauten: 900 ℳ sind heute, also in 0 Mon., 1500 ℳ in 2 Mon., 1000 ℳ in 5 Mon. zu zahlen. In wie viel Monaten (von heute an gerechnet) fällt der mittlere Termin?

Antwort. Nach obiger Regel in

$$\frac{900\cdot 0+1500\cdot 2+1000\cdot 5}{900+1500+1000}=\frac{0+3000+5000}{3400}=2\tfrac{6}{17}\text{ Mon.}$$

Rechnet man jene 2 weggelassenen Monate hinzu, so erhält man $2+2\frac{6}{17}=4\frac{6}{17}$ Mon. wie oben. Offenbar ist also die Rechnung eine einfachere, wenn man immer den 1. Zahlungstermin als Ausgangspunkt nimmt.

2. Aufgabe. N hat heute 1400, in 3 Mon. 1800, in 8 Mon. 4000, in 9 Mon. 3000 ℳ zu zahlen. In wie viel Monaten kann er diese $1400+1800+4000+3000=10200$ ℳ mit einem Male zahlen? Noch ist zur Bedingung gemacht worden, dafs das 1. Kapital mit 4 %, das 2. mit 6 %, das 3. mit $4\frac{1}{2}$ %, das 4. mit 5 % berechnet werden soll.

Auflösung. 1400 ℳ geben in 0 Mon. (heute!) mit 4 % denselben Gewinn wie $1400\cdot 0\cdot 4$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %. 1800 ℳ geben in 3 Mon. mit 6 % denselben Gewinn wie $1800\cdot 3\cdot 6$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %. 4000 ℳ in 8 Mon. mit $4\frac{1}{2}$ % $=4000\cdot 8\cdot 4\frac{1}{2}$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %. 3000 ℳ in 9 Mon. mit 5 % $=3000\cdot 9\cdot 5$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %.

Werden nun die vier Kapitalien an einem Tage bezahlt, der in x Monaten fallen soll, so ergiebt sich in gleicher Weise:

1400 ℳ geben in x Mon. mit 4 % denselben Gewinn, wie $1400\cdot x\cdot 4$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %. Eben so erhält man $1800\cdot x\cdot 6$ ℳ, $4000\cdot x\cdot 4\frac{1}{2}$ ℳ, $3000\cdot x\cdot 5$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %.

Offenbar geben nun

$$1400\cdot x\cdot 4+1800\cdot x\cdot 6+4000\cdot x\cdot 4\tfrac{1}{2}+3000\cdot x\cdot 5 \text{ ℳ}$$

in 1 Mon. mit 1 % denselben Gewinn wie

$$1400\cdot 0\cdot 4+1800\cdot 3\cdot 6+4000\cdot 8\cdot 4\tfrac{1}{2}+3000\cdot 9\cdot 5 \text{ ℳ}$$

in 1 Mon. mit 1 %. Folglich ist:

$$1400\cdot x\cdot 4+1800\cdot x\cdot 6+4000\cdot x\cdot 4\tfrac{1}{2}+3000\cdot x\cdot 5$$
$$=1400\cdot 0\cdot 4+1800\cdot 3\cdot 6+4000\cdot 8\cdot 4\tfrac{1}{2}+3000\cdot 9\cdot 5.$$

Dafür kann geschrieben werden:

$$(1400\cdot 4+1800\cdot 6+4000\cdot 4\tfrac{1}{2}+3000\cdot 5)\,x$$
$$=1400\cdot 0\cdot 4+1800\cdot 3\cdot 6+4000\cdot 8\cdot 4\tfrac{1}{2}+3000\cdot 9\cdot 5.$$

Hieraus folgt (vergl. die Berechnung von x in der 1. Aufg.):

$$x=\frac{1400\cdot 0\cdot 4+1800\cdot 3\cdot 6+4000\cdot 8\cdot 4\frac{1}{2}+3000\cdot 9\cdot 5}{1400\cdot 4+1800\cdot 6+4000\cdot 4\frac{1}{2}+3000\cdot 5}\text{ Mon.}$$

Allgemein:

Der mittlere Termin ist gleich der Summe der Produkte der Kapitalien, Zeiten und Procente dividiert durch die Summe der Produkte der Kapitalien und Procente.

Für vorstehende Aufgabe fällt mithin der mittlere Termin in

$$\frac{0+18\cdot 18+40\cdot 36+30\cdot 45}{14\cdot 4+18\cdot 6+40\cdot 4\frac{1}{2}+30\cdot 5}=\frac{324+1440+1350}{56+108+180+150}$$

$$=\frac{3114}{494}=6\tfrac{75}{247}\text{ Mon.}=6\text{ Mon. }9\text{ Tage.}$$

Noch könnte die Frage aufgeworfen werden, welcher mittlere Zinsfufs dieser Aufgabe entspricht.

Bezeichnet man den mittleren Zinsfufs mit x, so ist die Rechnung folgende:

1400 ℳ geben in 0 Mon. mit x % denselben Gewinn, wie $1400\cdot 0\cdot x$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %. Eben so:

1800 ℳ geben in 3 Mon. mit x % denselben Gewinn, wie $1800\cdot 3\cdot x$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %.

In gleicher Weise $4000\cdot 8\cdot x$ und $3000\cdot 9\cdot x$ ℳ in 1 Mon. mit 1 %.

Offenbar geben nun

$$1400\cdot 0\cdot x+1800\cdot 3\cdot x+4000\cdot 8\cdot x+3000\cdot 9\cdot x \text{ ℳ}$$

in 1 Mon. mit 1 % denselben Gewinn, wie der schon oben berechnete Ausdruck:

$$1400\cdot 0\cdot 4+1800\cdot 3\cdot 6+4000\cdot 8\cdot 4\tfrac{1}{2}+3000\cdot 9\cdot 5 \text{ ℳ}$$

in 1 Mon. mit 1 %. Folglich ist

$$1400\cdot 0\cdot x+1800\cdot 3\cdot x+4000\cdot 8\cdot x+3000\cdot 9\cdot x$$
$$=1400\cdot 0\cdot 4+1800\cdot 3\cdot 6+4000\cdot 8\cdot 4\tfrac{1}{2}+3000\cdot 9\cdot 5.$$

Hieraus folgt:

$$x=\frac{1400\cdot 0\cdot 4+1800\cdot 3\cdot 6+4000\cdot 8\cdot 4\frac{1}{2}+3000\cdot 9\cdot 5}{1400\cdot 0+1800\cdot 3+4000\cdot 8+3000\cdot 9}\ \%.$$

Allgemein:

Der mittlere Zinsfufs ist gleich der Summe der Produkte der Kapitalien, Zeiten und Procente dividiert durch die Summe der Produkte der Kapitalien und Zeiten.

Für vorstehende Aufgabe ist der mittlere Zinsfufs daher:

$$=\frac{0+18\cdot 18+40\cdot 36+30\cdot 45}{0+54+320+270}=\frac{3114}{644}=4{,}8354\ \%.$$

Anmerkung. Die hier gelehrte Berechnungsweise ist zwar die übliche, sie ist aber nicht rationell. Denn bei der Auflösung der 1. Aufgabe wurde behauptet, dafs 1000 ℳ in 7 Mon. denselben Gewinn geben wie 1000 . 7 ℳ in 1 Mon. Dies ist aber unrichtig, denn die in 7 Mon. zu zahlenden 1000 ℳ sind jetzt (7 Mon. früher) kleiner als 1000 ℳ Sind sie z. B.

jetzt 972 ℳ, so müfste es also heifsen: 972 ℳ (und nicht 1000 ℳ) geben in 7 Monaten denselben Gewinn wie 972 . 7 ℳ in 1 Mon. Eben so sind die beiden anderen Kapitalien jetzt kleiner als 900 und 1500 ℳ

Zunächst mag daher berechnet werden, wie grofs die 3 Kapitalien jetzt sind.

Das 1. Kapital ist in 2 Monaten 900 ℳ Wie grofs ist es heute? (Berechnet mit 5 %).

Auflösung. 100 giebt in 12 Mon. 5 Zinsen,

100 „ „ 2 „ $\frac{5}{6}$ „

100 wächst mithin in 2 Mon. auf $100\frac{5}{6}$ an.

Daher: $100\frac{5}{6}$ in 2 Mon., 100 jetzt; durch $100\frac{5}{6}$ divid.:

1 „ 2 „ $\frac{100}{100\frac{5}{6}}$ „ mit 900 multipl.:

900 „ 2 „ $\frac{100.900}{100\frac{5}{6}}$ jetzt.

Das 1. Kapital ist also jetzt $\frac{540000}{605} = 892{,}562$ ℳ

Das 2. Kapital ist in 4 Mon. 1500 ℳ, daher jetzt

$$\frac{100.1500}{101\frac{2}{3}} = \frac{450000}{305} = 1475{,}410 \text{ ℳ}$$

Das 3. Kapital ist in 7 Mon. 1000 ℳ, daher jetzt

$$\frac{100.1000}{102\frac{11}{12}} = \frac{1200000}{1235} = 971{,}660 \text{ ℳ}$$

Es geben also nicht 900 ℳ in 2 Mon. eben so viel Gewinn als 900 . 2 ℳ n 1 Mon., sondern 892,562 ℳ geben in 2 Mon. eben so viel Gewinn als 892,562 . 2 ℳ in 1 Mon. u. s. w.

Da die Kapitalien jetzt zusammen

$$892{,}562 + 1475{,}410 + 971{,}660 = 3339{,}632 \text{ ℳ}$$

betragen und an einem noch zu bestimmenden Tage

$$900 + 1500 + 1000 = 3400 \text{ ℳ}$$

bezahlt werden sollen, so würde nun die Aufgabe lauten:

In welcher Zeit (mittlerer Termin) wachsen 3339,632 ℳ zu 5 % auf 3400 ℳ an?

Dafür einfacher:

In welcher Zeit geben 3339,632 ℳ zu 5 % (3400 — 3339,632 =) 60,368 ℳ Zinsen?

Auflösung.

$$\text{In } \frac{100.60{,}368}{3339{,}632.5} \text{ Jahren} = \frac{100 . 60{,}368 . 12}{3339{,}632 . 5} \text{ Mon.} = 4{,}338 \text{ Mon.}$$

Dies wäre also der rationell berechnete mittlere Termin. Die übliche Berechnungsweise gab $4\frac{6}{17} = 4{,}353$ Mon.

12. Zinseszinsrechnung.

Hat A ein Kapital von 800 ℳ geliehen, dessen mit $5\frac{1}{2}$ % zu berechnenden Zinsen jährlich abgetragen werden sollen, so würde die Schuld des A nach einem Jahre

$$= 800 + \text{Zinsen von } 800 = 800 + \frac{800 \cdot 1 \cdot 5\frac{1}{2}}{100}$$

betragen, oder das Kapital ist nach einem Jahre auf

$$800 \cdot 1 + \frac{800 \cdot 5\frac{1}{2}}{100} = 800 \cdot \left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)$$

angewachsen. Die nicht abgetragenen Zinsen sind mithin stets zum Kapital zu schlagen, wodurch die sogenannten „Zinseszinsen" entstehen (auch „Zins auf Zins"). Wäre das Kapital nicht 800, sondern 3790 *M.*, so würde es mit $5\frac{1}{2}\,\%$ nach 1 Jahre auf

$$3790 \cdot \left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right) \text{ angewachsen sein.}$$

(Y) Hieraus folgt, dafs jedes Kapital mit $\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)$ zu multiplicieren ist, wenn man die Summe haben will, auf welche es mit $5\frac{1}{2}\,\%$ nach einem Jahre anwächst.

Läfst man nun jenes (schon angewachsene) Kapital

$$800 \cdot \left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)$$

wieder ein Jahr anwachsen, so wird es hiernach

$$= 800\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right) = 800\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)^2.$$

800 *M.* würden also nach 1 Jahre auf $800\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)$

„ 2 Jahren „ $800\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)^2$

anwachsen.

Läfst man das letztere Kapital

$$800\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)$$

wieder 1 Jahr anwachsen, so wird es jener Regel Y zufolge:

$$= 800\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right). \quad \text{Oder:}$$

800 *M.* wachsen mit Zinseszinsen

in 3 Jahren auf $800 \cdot \left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)^3$,

„ 4 „ „ $800 \cdot \left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)^4$ u. s. w. an.

In gleicher Weise fände man, dafs 3790 *M.* zu $4\frac{3}{8}\,\%$ mit Zinseszinsen

in 4 Jahren auf $3790 \cdot \left(1 + \frac{4\frac{3}{8}}{100}\right)^4$

„ 7 „ „ $3790 \cdot \left(1 + \frac{4\frac{3}{8}}{100}\right)^7$ anwachsen.

Hieraus resultiert folgende allgemeine Regel:

Um zu berechnen, auf welche Summe ein Kapital anwächst, wenn die jährlich zu zahlenden Zinsen nicht abgetragen werden, hat man die Procente durch 100 zu dividieren und zu dem Quotient 1 zu addieren. Die Summe ist hierauf so oft mit sich selbst zu multiplicieren, als die Zahl der Jahre Einheiten hat. Das erhaltene Produkt (Potenz) ist alsdann noch mit dem Kapital zu multiplicieren.

Beispiel. A leiht dem B 4000 *M.* zu $3\frac{1}{3}$ %. Die Zinsen, welche jährlich abgetragen werden sollten, hatte B 5 Jahre lang nicht bezahlt. Auf welche Summe war das Kapital in diesen 5 Jahren angewachsen?

Auflösung.

$$\text{Auf } 4000\cdot\left(1+\frac{3\frac{1}{3}}{100}\right)^5 = 4000\cdot\left(1+\frac{10}{300}\right)^5 = 4000\cdot\left(1\tfrac{1}{30}\right)^5$$

$$= 4000\cdot\frac{31}{30}\cdot\frac{31}{30}\cdot\frac{31}{30}\cdot\frac{31}{30}\cdot\frac{31}{30}\text{ M.}$$

$$\text{Da } 4000\cdot\frac{31}{30} = 4000\cdot\left(1+\frac{1}{30}\right) = 4000\cdot 1 + 4000\cdot\frac{1}{30}$$

$$= 4000 + \frac{4000}{30},$$

so ist die Multiplication mit $\frac{31}{30}$ am besten dadurch auszuführen, dafs man die jedesmal zu multiplicierende Zahl um den 30. Teil erhöht. Folglich:

```
 4000     : 30
  133,333
 4133,333 : 30
  137,778
 4271,111 : 30
  142,370
 4413,481 : 30
  147,116
 4560,597 : 30
  152,020
 4712,617 M. das gesuchte Kapital.
```

2. Beispiel. Die Stadt A hatte am 1. Dez. 1880 45719 Einwohner und nahm jährlich $1\frac{1}{4}$ % zu. Wie grofs wird die Stadt am 1. Dez. 1887 sein?

Auflösung. Da Bevölkerungen, Anpflanzungen u. s. w. offenbar eben so zunehmen müssen, wie ein mit Zinseszinsen anwachsendes Kapital, so ist hier die gesuchte Zahl

$$= 45719 \left(1 + \frac{1\frac{1}{4}}{100}\right)^7 = 45719 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^7$$

$$= 45719 \left(1 + \frac{1}{80}\right)^7 = 45719 \left(\frac{81}{80}\right)^7$$

$$= 45719 \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} \text{ Einw.}$$

Auch hier kann man die Multiplication mit $\frac{81}{80}$, d. i. mit $1 + \frac{1}{80}$ dadurch leicht ausführen, dafs man die jedesmal zu multiplicierende Zahl um den 80. Teil erhöht. Daher:

```
 45719    :80
   571,49
 ---------
 46290,49 :80
   578,63
 ---------
 46869,12 :80
   585,86
 ---------
 47454,98 :80
   593,19
 ---------
 48048,17 :80
   600,60
 ---------
 48648,77 :80
   608,11
 ---------
 49256,88 :80
   615,71
 ---------
 49872,59 Einwohner.
```

Aufgabe. *N* leiht dem *B* 7000 ℳ zu 5 %. *B* zahlt die jährlich abzutragenden Zinsen nicht. Auf welche Summe wächst das Kapital in $4\frac{1}{2}$ Jahren an?

Auflösung. Zunächst berechne man, auf welche Summe die 7000 ℳ in 4 Jahren anwachsen.

Man erhält $7000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^4 = 7000 \cdot \left(1 + \frac{1}{20}\right)^4$. Daher:

```
 7000     :20
  350
 ------
 7350     :20
  367,5
 -------
 7717,5   :20
  385,875
 ---------
 8103,375 :20
  405,169
 ---------
 8508,544 ℳ
```

Dieses Kapital mufs nun noch auf $\frac{7}{9}$ Jahre zu 5 % ausgeliehen werden. Es wächst daher auf

$$8508{,}544 + (\text{Zinsen von } 8508{,}544 \text{ in } \tfrac{7}{9} \text{ Jahren}) \text{ an}$$

$$= 8508{,}544 + \frac{8508{,}544 \cdot \frac{7}{9} \cdot 5}{100}$$

$$= 8508{,}544 = \frac{85{,}08544 \cdot 7 \cdot 5}{9}$$

$$= 8508{,}544 + 330{,}888$$

$$= 8839{,}432 \text{ ℳ}$$

13. Kettenrechnung (Kettenregel, Kettenansatz, Kette — Reesischer Ansatz).

Diese höchst praktische Rechnung lehrt, wie der 5. Satz dieses Paragraphen, aus 3 gegebenen Gröfsen eine Unbekannte finden. Sie löst jedoch derartige Aufgaben weit einfacher als jener 5. Satz, wenn die gleichartigen Gröfsen nicht gleichbenannt sind, vielmehr erst durch Zwischengleichungen in Beziehung zu einander gebracht werden können. Ferner kann die Kettenrechnung zunächst nur bei direkt-proportionalen Gröfsen Anwendung finden.

Das Verfahren selbst besteht darin, dafs man zwei senkrechte Zahlenreihen bildet, die linke Seite oben mit der zu suchenden, gewöhnlich mit x (oder einem Fragezeichen) bezeichneten Gröfse beginnt und dieser gegenüber, also auf die rechte Seite oben, die in der Aufgabe mit der Unbekannten zugleich im Fragesatze stehende (und daher mit derselben ungleichartige) Gröfse A stellt. Hierauf geht man zu der mit dieser letztern (A) gleichartigen Gröfse B der Aufgabe über, indem man, die Zwischengleichungen benutzend, jede neue Zeile mit demselben Mafse beginnt, mit dem man die vorhergehende beendigte. Ist man auf diese Weise bei der Gröfse B (auf der linken Seite) angelangt, so setzt man ihr gegenüber (auf die rechte Seite) die Gröfse C, welche mit der zu suchenden (x) gleichartig ist. Jede nun folgende Zeile beginnt wieder, wie bisher, mit dem die vorhergehende Zeile schliefsenden Mafse, bis man rechts unten zu einer Gröfse gelangt, die mit der zu suchenden (x) durch dasselbe Mafs ausgedrückt ist.

Ist auf diese Weise die Kette angesetzt, so richtet man etwa vorhandene gemischte Zahlen ein, behält von den Brüchen die Zähler auf derselben Seite und setzt die Nenner auf die entgegengesetzte. Hierauf kürzt man die Zahlen links mit denen rechts. Endlich ergiebt sich die unbekannte Gröfse (x) dadurch, dafs man das Produkt der rechtsstehenden Zahlen durch das Produkt der Zahlen links dividiert.

1. Beispiel. $13\frac{1}{2}$ engl. Yard kosten 15 Shilling. Wie viel Meter bekommt man für 49 Mark, wenn 1 Yard $= \frac{32}{35}$ Meter, 1 Pfund Sterling $=$ 10 Shilling $= 20\frac{1}{4}$ Mark?

Ansatz.

$$(\mathrm{L})\left\{\begin{array}{r|l} x \text{ Meter} & 49\ \mathcal{M}\ (\text{Gröfse } A, \text{ s. ob. d. Erklär.}) \\ 20\frac{1}{4}\ \mathcal{M} & 1 \text{ Pf. St.} \\ 1 \text{ Pf. St.} & 20 \text{ Shill.} \\ (\text{Gröfse } B)\ 15 \text{ Shill.} & 13\frac{1}{2} \text{ Yard } (\text{Gröfse } C) \\ 1 \text{ Yard} & \frac{32}{35} \text{ Meter.} \end{array}\right.$$

Jetzt sind $20\frac{1}{4}$ und $13\frac{1}{2}$ einzurichten $= \frac{81}{4}, \frac{27}{2}$, die Zähler 27 und 32 rechts, 81 links zu behalten, die Nenner 2 und 35 links, 4 rechts zu setzen. So erhält man die Zahlen:

$$(\mathrm{M})\left\{\begin{array}{r|l} x \text{ Meter} & 49 \\ 81 & 20 \\ 15 & 27 \\ 2 & 32 \\ 35 & 4 \end{array}\right.$$

Hierauf ist 27 mit 81 zu kürzen (3 an die Stelle von 81 zu setzen, desgleichen 35 mit 49, 5 und 2 der linken Seite mit 20 rechts zu kürzen. So ergiebt sich:

$$(\mathrm{N})\left\{\begin{array}{r|l} x \text{ Meter} & \not{49}\ 7 \\ 3\ \not{81} & \not{20}\ 2 \\ 15 & \not{27} \\ \not{2} & 32 \\ \not{5}\ \not{35} & 4 \end{array}\right.$$

Nun ist $x = \frac{7 \cdot 2 \cdot 32 \cdot 4}{3 \cdot 15} = \frac{1792}{45} = 39{,}82$ Meter.

Anmerkung. Die hier durch die Zahlenkomplexe M und N veranschaulichten Operationen nimmt man in der Praxis sogleich in der angesetzten Kette (siehe L) vor, indem man $20\frac{1}{4}$ streicht, dafür auf dieselbe linke Seite den Zähler 81, auf die rechte Seite den Nenner 4 setzt u. s. w.

Beweis. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} x \text{ Meter} &= 49 \text{ Mark}, \\ 20\tfrac{1}{4} \text{ Mark} &= 1 \text{ Pf. St.}, \\ 1 \text{ Pf. St.} &= 20 \text{ Shill.} \\ 15 \text{ Shill.} &= 13\tfrac{1}{2} \text{ Yard}, \\ 1 \text{ Yard} &= \tfrac{32}{35} \text{ Meter} \end{aligned}$$

können auch

$$\begin{aligned} x \cdot 1 \text{ Meter} &= 49 \cdot 1 \text{ Mark}, \\ 20\tfrac{1}{4} \cdot 1 \text{ Mark} &= 1 \cdot 1 \text{ Pf. St.}, \\ 1 \cdot 1 \text{ Pf. St.} &= 20 \cdot 1 \text{ Shill.}, \\ 15 \cdot 1 \text{ Shill.} &= 13\tfrac{1}{2} \cdot 1 \text{ Yard}, \\ 1 \cdot 1 \text{ Yard} &= \tfrac{32}{35} \cdot 1 \text{ Meter} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Nach §. 11, 10, Zus. aber ist nun:

$$x \cdot 1 \text{ Mtr.} \cdot 20\tfrac{1}{4} \cdot 1 \text{ М.} \cdot 1 \cdot 1 \text{ Pf. St.} \cdot 15 \cdot 1 \text{ Shill.} \cdot 1 \cdot 1 \text{ Yd.}$$
$$= 49 \cdot 1 \text{ М.} \cdot 1 \cdot 1 \text{ Pf. St.} \cdot 20 \cdot 1 \text{ Shill.} \cdot 13\tfrac{1}{2} \cdot 1 \text{ Yd.} \cdot \frac{32}{35} \cdot 1 \text{ Mtr.}$$

Nach §. 13, 30 kann man ferner beide Seiten durch 1 Mtr., durch 1 М., durch 1 Pf. St., 1 Sh. und 1 Yd. dividieren. Es bleibt alsdann nur:

$$x \cdot 20\tfrac{1}{4} \cdot 1 \cdot 15 \cdot 1 = 49 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 13\tfrac{1}{2} \cdot \frac{32}{35}.$$

Nach demselben Satze beide Seiten durch $20\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 15 \cdot 1$ dividiert, giebt endlich:

$$x = \frac{49 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 13\frac{1}{2} \cdot \frac{32}{35}}{20\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 15 \cdot 1}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit L, so ergiebt sich die Regel, dafs die Unbekannte der Quotient aus dem Produkt der Zahlen rechts und dem Produkte der Zahlen links ist. Werden noch die gemischten Zahlen dieses Quotienten eingerichtet und die Doppelbrüche (nach §. 37) beseitigt, so findet man

$$x = \frac{49 \cdot 20 \cdot 27 \cdot 32 \cdot 4}{2 \cdot 35 \cdot 81 \cdot 15}.$$

Vergleicht man diesen Quotient mit M, so zeigt sich auch die oben gegebene Regel hinsichtlich der Anordnung der Zähler und Nenner.

2. Beispiel. Wie viel Kilogramm einer Ware bekam man (im Jahre 1860) für $31\frac{1}{4}$ Francs, wenn 25 österr. Lot $2\frac{2}{5}$ Papiergulden kosteten? Man kennt aufserdem folgende Beziehungen:

1 österr. Pfd. = 32 Lot; 100 österr. Pfd. = 112 sächs. Pfd.
1 Kilogr. = 2 sächs. Pfd.; $87\frac{1}{2}$ Silbergulden = 100 Papierg.;
1 Silbergulden = $\frac{2}{3}$ Thaler; 1 Thlr. = 30 Groschen;
1 Franc = 8 Groschen.

Ansatz.

	x	Kilogr.	$31\frac{1}{4}$	Frc.	(A)
	1	Fr.	8	Gr.	
	30	Gr.	1	Thlr.	
	$\frac{2}{3}$	Thlr.	1	Guld.	
	$87\frac{1}{2}$	Guld.	100	Pap.-G.	
(B)	$2\frac{2}{5}$	Pap.-G.	25	Lot	(C)
	32	Lot	1	öster. Pf.	
	100	öst. Pf.	112	sächs. Pf.	
	2	sächs. Pf.	1	Kilogr.	

Jetzt sind $87\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{5}$, $31\frac{1}{4}$ einzurichten und die Nenner der Brüche auf die andere Seite zu setzen. So erhält man die Zahlen:

x Kilogr.	125
30	8
2	100
175	25
12	112
32	3
100	2
2	5
4	

Nachdem man noch 100 mit 100, 2 mit 2, 2 · 4 mit 8, 175 mit 25, die entstehende 7 mit 112 u. s. w. gekürzt, behält man rechts 125, links 2, 4 und 6. Folglich ist:

$$x = \frac{125}{2 \cdot 4 \cdot 6} = 2{,}604 \text{ Kilogr.}$$

3. Beispiel. Der Kaufmann S aus München kaufte (im Jahre 1850) in England 75 Pfund einer Ware für $12\frac{4}{5}$ Pfd. Sterl. Auf dem Transporte nach München verdarb $2\frac{4}{5}$ % der Ware. Die Spesen (Transportkosten) betrugen $1\frac{1}{4}$ %. Wie viel Lot konnte S von dieser Ware für 35 Kreuzer geben, um 20 % zu gewinnen?

1 engl. Pfd. = 453,6 Gr.; 1 bayer. Pfd. = 32 Lot = 560 Gr.;
1 Pfd. Sterl. = $6\frac{3}{4}$ Thlr.; 4 Thlr. = 7 bayer. Gulden;
1 bayer. Guld. = 60 Kreuzer.

Ansatz.			
	x Lot	35 Kr. (A)	
	60 Kreuzer	1 bayer. Gld.	
	7 bayer. Gld.	4 Thlr.	
	$6\frac{3}{4}$ Thlr.	1 Pfd. St.	
(B)	$12\frac{4}{5}$ Pfd. St.	75 engl. Pfd.	(C)
	1 engl. Pfd.	453,6 Gramm	
	560 Gramm	1 bayer. Pfd.	
	1 bayer. Pfd.	32 Lot	
	120	100 . . . . . . a	
	100	$97\frac{1}{5}$ . . . . . b	
	$101\frac{1}{4}$	100 c	

Anmerkung zu a: Um zu gewinnen (120 Kreuzer beim Verkauf gegen 100 Kr. beim Einkauf zu erhalten), mufs er für dasselbe Geld weniger Lot geben. Folglich ist die (ohne die 20 % berechnete) Lotzahl noch durch die gröfsere Zahl 120 zu dividieren und mit der kleinern Zahl 100 zu multiplicieren, mithin 120 auf die dividierende (linke), 100 auf die multiplicierende (rechte) Seite zu stellen.

Zu b: Da $2\frac{4}{5}$ % der Ware verdorben, so hat er von 100 nur noch $97\frac{1}{5}$ % Ware. Folglich mufs es rechts statt 75 heifsen: $\frac{75 \cdot 97\frac{1}{5}}{100}$, d. h. $97\frac{1}{5}$ ist auf die Seite der 75, 100 auf die entgegengesetzte Seite zu stellen.

Zu *c*: Der Preis der Ware war durch die Spesen $1\frac{1}{4}$ % höher geworden, statt $12\frac{4}{5}$ % Pfd. St. mufs es daher $\frac{12\frac{4}{5}\cdot 101\frac{1}{4}}{100}$ heifsen und folglich ist $101\frac{1}{4}$ auf die Seite der $12\frac{4}{5}$, 100 auf die andere Seite zu stellen.

Nachdem die gemischten Zahlen eingerichtet $\left(453{,}6=\frac{4536}{10}\right)$ und die Nenner auf die andere Seite gesetzt worden sind, erhält man die Zahlen:

x Lot	35
60	4
7	75
27	4536
64	32
560	100
120	486
100	100
405	4
10	5
5	4

Sind hier die Zahlen gegenseitig gekürzt, so behält man rechts nur noch die Zahl 6. Folglich ist:

$$x=\frac{6\cdot 1}{1}=6 \text{ Lot.}$$

Zusatz. Um Aufgaben mit indirektproportionalen Gröfsen anzusetzen, hat man nach dem vorläufigen, direktproportionale Gröfsen voraussetzenden Bilden der Kette sämtliche Zahlen von A bis B (s. ob. die Erklärung) auf die entgegengesetzte Seite zu stellen.

Beispiel. 30 Männer vollenden eine Arbeit in 48 Stunden. In welcher Zeit 40 Frauen, wenn 5 Frauen dasselbe leisten wie 4 Männer?

Denkt man sich direktproportionale Gröfsen, so würde man anzusetzen haben:

x Tage	40 Frauen (A)
5 Frauen	4 Männer
(B) 30 Männer	48 Stunden (C).

Da aber 40 Personen die Arbeit in weniger Zeit vollenden als 30, die Aufgabe also indirektproportionale Gröfsen enthält, so sind die Zahlen von A bis B auf die entgegengesetzte Seite zu stellen. Daher ist der endgültige

Ansatz:

x Tage	5
40	30
4	48

Berechnung:

$$\begin{array}{r|l} x & 5 \\ \not{40} & \not{30} \\ \not{4} & \not{48}\ \not{12}\ 3 \end{array}$$

$x = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ Stunden.

14. Regula falsi.

Man berechnet die Angaben der Aufgabe an Stelle der zu suchenden Zahl mit 2 beliebig angenommenen Zahlen (Hypothesen) und schliefst dann aus dem gefundenen, mit der Aufgabe nicht übereinstimmenden Resultate mittelst der proportionalen Reduktion auf die Einheit auf die zu suchende Zahl.

1. Beispiel. A sagt zu B: Merke dir eine Zahl, multipliciere sie mit 4, subtrahiere vom Produkt 10, addiere zum Reste das Doppelte der gemerkten Zahl, dividiere die Summe durch 3 und ziehe vom Quotient die Hälfte der gemerkten Zahl ab. Wie viel hast du jetzt? B antwortet: Ich habe $\frac{1}{6}$ mehr als ich mir gemerkt hatte. Welche Zahl hatte sich B gemerkt?

Auflösung.

1. Hypothese (Annahme). Angenommen, B hätte sich 15 gemerkt, so würde er der Aufgabe gemäfs folgende Operationen vorgenommen haben:

$$15 \cdot 4 = 60;\ 60 - 10 = 50;\ 50 + 2 \cdot 15 = 80;\ 80 : 3 = 26\tfrac{2}{3};$$

$$26\tfrac{2}{3} - \frac{15}{2} = 19\tfrac{1}{6}.$$

Diese Zahl aber ist $4\frac{1}{6}$ mehr als die angenommene Zahl 15. Folglich ist 15 die gemerkte Zahl nicht, weil B nach der Aufgabe nur $\frac{1}{6}$ mehr erhalten sollte.

2. Hypothese. B mag sich 10 gemerkt haben. Dann rechnete er:

$$10 \cdot 4 = 40;\ 40 - 10 = 30;\ 30 + 2 \cdot 10 = 50;\ 50 : 3 = 16\tfrac{2}{3};$$

$$16\tfrac{2}{3} - \frac{10}{2} = 11\tfrac{2}{3}.$$

Dies ist $1\frac{2}{3}$ mehr als die gemerkte Zahl 10, nicht aber, wie die Aufgabe verlangt, $\frac{1}{6}$ mehr.

Resultat	Gemerkte Zahl
$4\frac{1}{6}$	15
$1\frac{2}{3}$	10
$\frac{1}{6}$	? (Die der Aufg. entsprechende gemerkte Zahl.)

Fällt also das Resultat von $4\frac{1}{6}$ auf $1\frac{2}{3}$, d. i. um $2\frac{1}{2}$, so fällt die gemerkte Zahl von 15 auf 10, d. i. um 5. Um wie viel mufs 15 bis zur gesuchten Zahl fallen, wenn das Resultat von $4\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{6}$, d. i. um 4 fallen soll?

Fallen des Resultats von $4\frac{1}{6}$ aus:	Verminderung der 15:
$2\frac{1}{2}$	5
4	?

Oder: Beim Resultat $2\frac{1}{2}$ ist die Verminderung 5. Wie grofs ist die Verminderung beim Resultat 4?

Resultat:	Verminderung der 15:	
$2\frac{1}{2}$	5;	durch $2\frac{1}{2}$ div.:
1	2;	mit 4 mult.:
4	8.	

15 mufs also um 8 vermindert werden, um die gesuchte Zahl zu erhalten. Sie ist daher $15 - 8 = 7$.

2. Beispiel. N leiht dem A ein Kapital zu 5 % auf 8 Monate, dem B ein anderes Kapital, welches um 100 *M.* kleiner ist, als das Doppelte jenes ersten Kapitals, zu 4 % auf 9 Monate. N erhält von A und B zusammen 305 *M.* Zinsen. Wie viel hatte er dem A geliehen?

Auflösung.

1. Hypothese. Das Kapital des A sei $= 1500$, dann ist das des B (s. Aufgabe) $= 2 \cdot 1500 - 100 = 2900$.

$$\text{Zinsen des } A = \frac{1500 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{100} = 50;$$

$$\text{,, \quad ,, } B = \frac{2900 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4}{100} = 87.$$

Zusammen $50 + 87 = 137$ Zinsen (also nicht 305, wie die Aufgabe verlangt).

2. Hypothese. Das Kapital des A sei $= 2700$, dann ist das des $B = 2 \cdot 2700 - 100 = 5300$.

$$\text{Zinsen des } A = \frac{2700 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{100} = 90;$$

$$\text{,, \quad ,, } B = \frac{5300 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4}{100} = 159.$$

Zusammen $90 + 159 = 249$ Zinsen (statt 305 der Aufgabe).

Summe der Zinsen:	Kapital des A:
249	2700
137	1500
305	?

Steigt die Summe der Zinsen von 137 bis 249, d. i. um 112, so steigt das Kapital des A von 1500 bis 2700, d. i. um 1200. Steigt nun die Summe der Zinsen von 137 bis 305, d. i. um 168, um wie viel wird dann 1500 bis zum gesuchten Kapital steigen müssen?

Steigen der Summe der Zinsen:	Vergröfserung des Kapitals 1500:
112	1200
168	?

Bei 112 ist die Vergröfserung (der 1500) $= 1200$;

„ 1 „ „ „ $= \frac{1200}{112}$;

„ 168 „ „ „ $= \frac{1200 \cdot 168}{112} = 1800.$

Das Kapital 1500 ist also um 1800 zu vermehren, um das gesuchte Kapital des A zu erhalten. Dieses ist daher

$$= 1500 + 1800 = 3300$$

und mithin das Kapital des B

$$= 2 \cdot 3300 - 100 = 6500 \text{ M.}$$

15. Auflösen durch Rückwärtsschreiten.

Gewisse Aufgaben lassen sich einfach dadurch lösen, dafs man vom bekannten Endresultat aus bis zur unbekannten Ausgangszahl rückwärts schreitet.

Beispiel. 5 Personen, A, B, C, D, E, machen ein Spiel. Zuerst soll A jeder der übrigen Personen so viel geben, als er schon hat (hatte z. B. B: 17, so würde A dem B 17 zu geben haben), hierauf soll B jeder der übrigen Personen so viel geben als er jetzt hat, hierauf C, dann D und zuletzt E. Nachdem E Jedem so viel gegeben, als er schon hatte, besafsen sie alle gleichviel und zwar Jeder 256 M. Wie viel hatte Jeder im Anfange?

Auflösung. Nachdem E gegeben, hatte

A	B	C	D	E
256	256	256	256	256.

Folglich mufs vorher A (desgleichen B, C und D) 128 gehabt haben, weil er alsdann von E noch 128 zu bekommen hatte, so dafs er nun jene 256 besafs.

Mithin hatten sie vor dem Austeilen des E:

A	B	C	D	E
128	128	128	128	?

Da E jedem 128, zusammen also $4 \cdot 128 = 512$ gegeben hatte und noch immer 256 behalten, so mufs er vor dem Austeilen $512 + 256 = 768$ gehabt haben.

Folglich besafsen sie vor dem Austeilen des E:

A B C D E
128 128 128 128 768.

Vor dem Austeilen des D mufs Jeder

64 64 64 ? 384

gehabt haben, D aber offenbar: 128 vermehrt um das, was er dem A, B, C und E gegeben, d. i. $128 + 64 + 64 + 64 + 384 = 704$.

Vor dem Austeilen des D besafsen sie also:

64 64 64 704 384.

In gleicher Weise findet man vor dem Austeilen des C:

32 32 ? 352 192.

Für C ergiebt sich $64 + 32 + 32 + 352 + 192 = 672$. Daher

32 32 672 352 192.

Vor dem Austeilen des B:

16 ? 336 176 96.

Für B ergiebt sich $32 + 16 + 336 + 176 + 96 = 656$. Daher

16 656 336 176 96.

Vor dem Austeilen des A oder der anfängliche Besitz:

? 328 168 88 48.

Für A ergiebt sich $16 + 328 + 168 + 88 + 48 = 648$.

Sie besafsen mithin anfänglich:

648 328 168 88 48.

§. 51. Von den entgegengesetzten Gröfsen.

(Positive und negative Gröfsen.)

1. Entstehung und Wesen.

a. Betrachtet man Gröfsen, die nur in einer Richtung vorhanden sind, von einem Standpunkte innerhalb derselben aus, so ergeben sich zwei entgegengesetzte Richtungen.

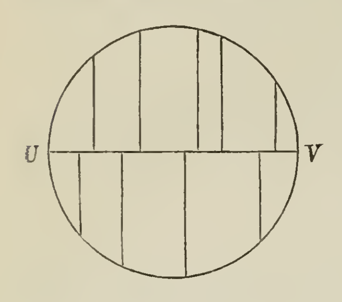
Betrachtet man z. B. die Teile der geraden Linie LN



von M aus, so ergeben sich die beiden entgegengesetzten Richtungen MN und ML. Man nennt alsdann die eine Richtung, z. B. MN, die positive, die entgegengesetzte, ML, die negative. Betrachtet man die Teile der Geraden QR von S aus, so ist z. B. QS positiv, SR negativ. Gewöhnlich setzt man die Richtung nach rechts (MN) und nach oben (SQ) positiv, nach links (ML) und nach unten (SR) negativ.

Q
S
R

b. Liegen die Gröfsen nicht so, dafs sie von irgend einem Standpunkte aus betrachtet nur in 2 entgegengesetzten Richtungen vorhanden sind, können sie vielmehr jede nur mögliche Richtung einnehmen, so sind sie weder positiv noch negativ, man nennt sie alsdann absolute Gröfsen. So sind z. B. die Seiten eines Dreiecks absolute Gröfsen (Linien), da jede in Bezug auf die andere eine beliebige Richtung einnehmen kann. Eben so ist der Radius eines Kreises eine absolute Gröfse, da er nach jeder Richtung hin liegen kann. Zieht man dagegen vom Durchmesser UV eines Kreises nach oben und unten Senkrechte bis an die Peripherie, so sind die oberen den unteren immer entgegengesetzt, und man bezeichnet daher die oberen als positive, die unteren als negative Senkrechte.



c. $e \quad d \quad c \quad b \quad a \quad M \quad A \quad B \quad C \quad D \quad E$

Der Mittelpunkt M, von dem aus die Gröfsen entgegengesezt liegen, ist bei den Zahlen offenbar 0 (Null). Denn mifst man von M aus die Strecken MA, MB, MC ..... mit der als Einheit gedachten Länge $MA = Ma$, so erhält man für MA die Zahl 1, für MB die Zahl 2, für MC: 3 u. s. w. Geht man von A $(= 1)$ aus in der Richtung nach M, so nimmt auch die von M aus gemessene Strecke, folglich auch die gleichbedeutende Zahl fortwährend ab und man erhält z. B. $\frac{1}{2}$ (= der Hälfte von MA), $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ u. s. w., bis man zu $M = 0$ gelangt. Auf der andern Seite würde man die jenen Gröfsen $MA = 1$, $MB = 2$ .... entgegengesetzten Gröfsen $Ma = 1$, $Mb = 2$, $Mc = 3$ erhalten.

d. .... 6 7 8 9 10 11 12 ....

Setzt man in vorstehender Linie die gleichweit abstehenden Punkte mit den Zahlen 6, 7, 8, 9, 10, ... identisch und betrachtet man 9 als den Mittelpunkt, so würden die von 9 gleichweit abstehenden Zahlen 11 und 7 offenbar entgegengesetzte Zahlen vorstellen. Da nun 11 um 2 gröfser als 9, 7 um 2 kleiner als 9, so würde man demnach vom Mittelpunkte 9 aus durch Anwendung der entgegengesetzten Operationen Addition und Subtraktion entgegengesetzte Zahlen erhalten.

Läfst man die Zahlen nach rechts hin abnehmen, z. B.

.... 12 11 10 9 8 7 6 ....

so würden gleichwohl 11 und 7 in Bezug auf den Mittelpunkt 9 entgegengesetzt liegen und die eine Zahl würde ganz wie vorher durch Addition der Zahl 2 zum Mittelpunkte 9, die entgegengesetzte durch Subtraktion der 2 vom Mittelpunkte 9 entstehen.

Hieraus folgt: Entgegengesetzte Zahlen entstehen dadurch, daſs man vom Mittelpunkte aus dieselbe Zahl addiert und subtrahiert.

e. Da nun nicht 9, sondern, wie oben gezeigt worden ist, 0 der Mittelpunkt der Zahlen ist, so müssen die beiden Zahlen, welche durch Vermehrung von 0 um 4 einerseits und durch Verminderung von 0 um 4 andererseits entstehen, offenbar entgegengesetzt liegen. Obgleich es gleichgültig ist, welche von diesen beiden aus 0 und 4 entstehenden Zahlen positiv und welche negativ genannt wird, da Positives und Negatives nur Entgegengesetztes bezeichnet, so entspricht es doch dem bisherigen Charakter der Zahlen, daſs diejenigen, welche > 0 sind, positive (affirmative, bejahende, wirklich vorhandene) und die, welche < 0 sind, negative genannt werden.

Da man die positiven Gröſsen mit $+$ (plus), die negativen mit $-$ (minus) bezeichnet, so ist die positive Zahl $+4$ diejenige, welche um 4 gröſser als 0, die negative Zahl -4 diejenige, welche um 4 kleiner als 0 ist.

f. Der bisherigen Entwickelung gemäſs gewinnt man durch nachstehende Linie Y ein anschauliches Bild sämtlicher positiven und negativen Zahlen:

$$-\infty \ldots\ldots -5\;-4\;-3\;-2\;-1\;\;0\;\;+1\;+2\;+3\;+4\;+5\;\ldots\ldots+\infty \qquad (Y)$$

Negative Zahlen. Positive Zahlen.

Zugleich ergab sich, daſs

$+4$ um 4 gröſser als die links liegende Zahl 0,
-4 „ 4 kleiner „ 0, d. i. (s. §. 1, 6)
0 „ 4 gröſser „ die links liegende Zahl -4,

und folglich:

$+4$ um 8 gröſser als die links liegende Zahl -4 ist.

Jede in der Linie Y enthaltene Zahl ist demnach gröſser als eine links liegende und zwar um so viel Einheiten gröſser, um so viel Abschnitte (Einheiten) sie von der links liegenden entfernt ist. Daher ist

$+9$ um 7 gröſser als $+2$,
$+9$ „ 8 „ „ $+1$,
$+9$ „ 9 „ „ 0,
$+9$ „ 10 „ „ -1,
$+9$ „ 20 „ „ -11,

$+3$ um 7 gröſser als -4,
-6 „ 10 „ „ -16,
$+40$ „ 30 „ „ $+10$,
$+\frac{1}{4}$ „ 1 „ „ $-\frac{3}{4}$,

und folglich auch

-1 um 2 kleiner als $+1$,
-9 „ 5 „ „ -4,
-8 „ 50 „ „ $+42$.

g. Die Strecke von 0 bis $+5$ (s. die Linie Y) ist eben so groſs, als die von -5 bis 0, oder von -3 bis $+2$, oder von -11 bis -6. Diese Strecke (von 5 Einheiten Länge) würde also, wenn sie unabhängig von einer entgegengesetzten Lage gedacht wird, die *absolute* (weder positive noch negative) Zahl 5 vorstellen (s. Satz b). Miſst man jedoch mit dieser „absoluten Zahl" vom Mittelpunkte 0 aus nach rechts, so entsteht die positive Zahl $+5$, entgegengesetzt (nach links): die negative Zahl -5.

Folglich hat man in der positiven Zahl $+5$ und in der negativen Zahl -5 zuerst das *Vorzeichen* ($+$ oder $-$) zu unterscheiden, welches die vom Mittelpunkte ausgehende Richtung angiebt, und dann die absolute Zahl (5), mit welcher die Entfernung vom Mittelpunkte (0) gemessen wird.

Abstrahiert man von der Richtung, so drückt man sich aus: „$+5$ ist *absolut genommen* um 3 gröſser als -2" (d. h. die absolute Strecke, resp. Zahl 5 ist um 3 gröſser als die absolute Strecke, resp. Zahl 2), oder: „-6 ist absolut genommen um 10 kleiner als -16" (vergl. das 7. Beisp. in f.).

h. Da die absolute Strecke 4 (die absolute Zahl 4) um 1 gröſser als die absolute Strecke 3 (die absolute Zahl 3), die positive Zahl $+4$ aber auch um 1 gröſser als die positive Zahl $+3$ ist (die negative Zahl -4 ist um 1 kleiner als -3!), so sind mithin *die positiven Zahlen den absoluten gleich*. Für die positive Zahl kann also stets die absolute, für die absolute die positive gesetzt werden.

i. In „8 Personen" ist die Zahl 8 zunächst eine absolute, weil hier keine entgegengesetzte Richtung auftritt. Nach Satz h ist diese absolute 8 aber auch der positiven 8 gleich. Von 8 Personen können sich 10 Personen nicht entfernen, das Resultat „-2 Personen" würde wegen der mangelnden entgegengesetzten Richtung unmöglich sein. Allgemein:

> *Individuen, bei welchen eine entgegengesetzte Richtung nicht auftritt, lassen nur positive, nicht aber negative Zahlen zu.*

Tritt ein Ereignis 2 (d. i. $+2$) Minuten, oder $+1$, 0, -1, -2 .... Minuten *nach* 7 Uhr ein, so muſs es resp. 7 Uhr 2 Min.,

7 Uhr 1 Min., 7 Uhr 0 Min., 6 Uhr 59 Min., 6 Uhr 58 Min. .... stattfinden. — 12 Min. nach 7 Uhr ist daher gleichbedeutend mit 12 (d. i. + 12) Minuten vor 7 Uhr. In gleicher Weise ist — 12 Min. vor 7 Uhr gleichbedeutend mit + 12 Min. nach 7 Uhr. In solchen Fällen haben also sowohl die positiven, als auch die negativen Zahlen Sinn, und es können sogar die positiven Gröfsen in negative, die negativen in positive umgekehrt werden.

k. + 4 und — 4 erhält man dadurch, dafs man 0 um 4 vermehrt, resp. 0 um 4 vermindert. Folglich ist

die Summe 0 + 4 der positiven Zahl + 4,
„ Differenz 0 — 4 „ negativen „ — 4

gleich, oder die positive Zahl + 4 ist die Abkürzung für die Summe 0 + 4, die negative Zahl — 4 die Abkürzung für die Differenz 0 — 4.

Um daher die Sätze in Bezug auf die entgegengesetzten (pos. und neg.) Zahlen zu beweisen, kann man für + 4 (wobei + das Vorzeichen) einstweilen die Summe 0 + 4 (wobei + das Additionszeichen), eben so für — 4 (— das Vorzeichen) die Differenz 0 — 4 (— das Subtraktionszeichen) setzen und die Rechnung mit dieser Summe und Differenz statt der positiven und negativen Zahl ausführen. Erhält man dann als Resultat z. B. die Differenz 0 — 7, so setzt man dafür die negative Zahl — 7, und erhält man die Summe $0 + \frac{2}{3}$, so setzt man dafür die positive Zahl $+ \frac{2}{3}$.

Anmerkung. Aus geometrischen Gründen hat man sich die Linie der positiven und negativen Zahlen auf der Oberfläche einer unendlichgrofsen Kugel zu denken. Die vom Nullpunkte aus auf dieser Oberfläche fortgesetzte Linie gelangt nach rechts zu $+\infty$, nach links zu $-\infty$, und da diese beiden Punkte gleichweit von 0, aber auch unendlich weit entfernt sein müssen, so liegen sie 0 gegenüber. Der vom Nullpunkte durch den Mittelpunkt dieser Kugel gezogene Durchmesser mufs also jenseits auf $+\infty$ und $-\infty$ treffen. Wie man von + 0 aus beim Fortschreiten um nur ein unendlichkleines Stück nach links zu — 0 gelangt, so mufs man auch in der Richtung nach rechts von $+\infty$ aus beim Fortschreiten um nur ein unendlichkleines Stück zu $-\infty$ gelangen. $+\infty$ und $-\infty$ liegen also so unendlich nahe beisammen wie + 0 und — 0. Wollte man dieser Auffassung entgegenhalten, dafs die Linie der entgegengesetzten Zahlen doch nur in einer Ebene und nicht auf einer gekrümmten Fläche lägen, so ist dem zu erwidern, dafs der Teil der unendlichgrofsen Kugel, in welchem wir die endlichen und wenn auch noch so grofsen Zahlen konstruieren, doch nur eben sein kann. Denn wiche derselbe von + Decillion bis — Decillion nur um das geringste Angebbare von der Ebene ab, so wäre die Kugel nur eine sehr grofse endliche, aber keine unendliche.

2. Addition mit entgegengesetzten Zahlen.

a. Formelle Addition.

Die Summe der entgegengesetzten Gröfsen —8, + 11 und — 14 müfste vollständig (— 8) + (+ 11) + (— 14) geschrieben werden, d. h. die negative Zahl — 8 vermehrt um die positive Zahl

$+11$ und vermehrt um die negative Zahl -14. Man läfst jedoch das Additionszeichen stets weg und schreibt die zu addierenden Gröfsen nur mit ihren Vorzeichen neben einander. Jene Summe ist daher $= -8 + 11 - 14$.

Die Summe von -5 und $-13 = -5 - 13$;
„ „ „ -2, $+4$ und $+30 = -2 + 4 + 30$;
„ „ „ -6, -7 und $-8 = -6 - 7 - 8$.

Ist der 1. Summand positiv, so läfst man das Vorzeichen weg. Daher:

die Summe von $+3$ und $-10 = 3 - 10$;
„ „ „ $+1$, -20 und $+36 = 1 - 20 + 36$;
„ „ „ $+18$ und $+23 = 18 + 23$.

Eine solche Summe von positiven und negativen Zahlen nennt man „algebraische Summe“, die zu addierenden Zahlen „Glieder“ derselben. Die vorletzte Summe ist also eine dreigliederige.

Umgekehrt bedeutet $-4 + 6 - 8$ so viel als

$$(-4) + (-6) + (-8)$$

Vorzeichen — Additionszeichen — Vorz. — Additionsz. — Vorz.

$19 - 23$ bedeutet $(+19) + (-23)$,
$-1 - 2$ „ $(-1) + (-2)$.

Zusatz. Vergleicht man $3 + (-7) + (+5)$
mit $3 - 7 + 5$, so ergiebt sich,

dafs $+(+ \ldots .)$ in $+$,
$+(- \ldots .)$ „ $-$ übergeht.

b. Materielle Addition.

I. Gleichstimmige (mit gleichen Vorzeichen behaftete) Zahlen addiert man, indem man ihre absoluten Zahlen addiert und der Summe das Vorzeichen der Summanden giebt.

Beispiele.

$-7 - 5 = -12$; $+3 + 4 = +7$ oder $3 + 4 = 7$;

$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 = -2\frac{1}{4}$; $+5 + 8 + 11 = +24$ oder $5 + 8 + 11 = 24$.

Beweis.

$-7 - 5 =$ Summe von -7 und $-5 = (-7) + (-5)$.

Da für -7 die Differenz $0 - 7$, für -5 die Differenz $0 - 5$ gesetzt werden kann, so ist $(-7) + (-5) = (0 - 7) + (0 - 5)$ [wo

0, 7, 5 absolute Zahlen, die Minuszeichen aber Subtraktionszeichen sind] $= 0 - 7 + 0 - 5 = 0 - 7 - 5 = 0 - (7 + 5)$
$= 0 - 12$ (Diff.) $= -12$ (neg. Zahl).

Eben so:

$$+3 + 4 = (+3) + (+4) = (0 + 3) + (0 + 4) = 0 + 3 + 0 + 4$$
$$= 0 + 3 + 4 = 0 + 7 \text{ (Summe)} = +7 \text{ (posit. Zahl).}$$

Anmerkung. Der Anfänger könnte sich auch $-7 - 5$ denken als Summe von 7 negativen Einheiten und 5 negativen Einheiten $= 12$ negative Einheiten $= -12$. Eben so $+3 + 4 =$ Summe von 3 u. 4 positiven Einheiten $= 7$ pos. Einheiten $= +7$.

II. Um 2 ungleichstimmige (mit verschiedenen Vorzeichen behaftete) Zahlen zu addieren, vermindert man die gröfsere absolute Zahl um die kleinere und giebt der Differenz das Vorzeichen des Summanden mit der gröfseren absoluten Zahl.

1. Beispiel. $-13 + 8 = ?$ Die gröfsere absolute Zahl 13 um die kleinere 8 vermindert giebt 5 als absolute Zahl der zu suchenden Summe. Das Vorzeichen derselben ist das der gröfseren absoluten Zahl (13), also $-$. Folglich ist die verlangte Summe $= -5$.

2. Beispiel. $-7 + 19$? Die gröfsere absolute Zahl 19 vermindert um die kleinere $7 = 12$ (die absolute Zahl der Summe). Das Zeichen ist das des Gliedes $+19$, weil dieses die gröfsere absolute Zahl hat. Daher $= +12$ oder $= 12$.

1. Beweis. $-13 + 8 = (-13) + (+8) = (0 - 13) + (0 + 8)$
$= 0 - 13 + 0 + 8 = 0 - 13 + 8 = 0 - (13 - 8)$ [s. §. 9, 19]
$= 0 - 5$ (Diff.) $= -5$ (negat. Zahl).

$-7 + 19 = +19 - 7 = (0 + 19) + (0 - 7) = 0 + 19 + 0 - 7$
$= 0 + 19 - 7 = 0 + (19 - 7) = 0 + 12$ (Summe) $= 12$ (posit. Zahl).

2. Beweis. Zwei ungleichstimmige Zahlen mit gleichen absoluten Zahlen heben sich, z. B. $+7 - 7 = 0$; denn $(-8) + (+8)$ $= (0 - 8) + (0 + 8) = 0 - 8 + 0 + 8 = 0 - 8 + 8 = 0$.

Nun ist $-13 + 8 = -5 - 8 + 8$ (und weil $-8 + 8$ sich hebt) $= -5$. Eben so $-7 + 19 = -7 + 7 + 12$ (und weil $-7 + 7$ sich hebt) $= +12$.

Beispiele. $+3 - 7 = -4$ oder $3 - 7 = -4$;
$+11 - 8 = +3$ oder $11 - 8 = 3$.

$\frac{5}{8} - \frac{11}{12} = \frac{15}{24} - \frac{22}{24}$? $\frac{22}{24} - \frac{15}{24} = \frac{7}{24}$ giebt die absolute Zahl der Summe, die wegen $-\frac{22}{24}$ negativ ist; daher $= -\frac{7}{24}$.

$-17\frac{2}{3} + 13\frac{3}{4}$? Da $17\frac{2}{3} - 13\frac{3}{4} = 3\frac{11}{12}$ und die gröfsere absolute Zahl $17\frac{2}{3}$ das Zeichen $-$ hat, so ist die Summe $= -3\frac{11}{12}$.

$-6\frac{3}{5} + 13\frac{1}{2}$? $13\frac{1}{2} - 6\frac{3}{5} = 6\frac{9}{10}$ ist die absolute Zahl der Summe, die wegen $+13\frac{1}{2}$ positiv ist; daher $= +6\frac{9}{10}$.

Anmerkung. Geht Jemand (siehe die Linie unter 1, c) von M aus nach C und dann von C nach e, so ist er vom Nullpunkte M aus 3 Schritte nach rechts und dann 8 Schritte nach links, oder 3 Schritte in positiver Richtung und dann 8 Schritte in negativer Richtung gegangen, mithin stellt diese Bewegung die Summe

$$0 + 3 - 8 = + 3 - 8 = - 5 \text{ (Punkt } e\text{!)}$$

dar. Absolut genommen ist er aber zuerst 3, dann 8, also zusammen 11 Schritte gegangen. Man sagt daher: Die „absolute Summe“ von $+3-8$ (d. i. die Summe der absoluten Zahlen) ist $= 11$.

III. Mehr als 2 ungleichstimmige Zahlen addiert man entweder, indem man nach I die positiven Zahlen für sich, eben so die negativen für sich addiert und dann beide Summen nach II vereinigt. Z. B.

$$\begin{aligned} -7\tfrac{7}{12} + 5\tfrac{9}{14} + 8\tfrac{13}{20} - 17\tfrac{17}{21} &= \underbrace{5\tfrac{9}{14} + 8\tfrac{13}{20}} \underbrace{- 7\tfrac{7}{12} - 17\tfrac{17}{21}} \\ &= \quad 14\tfrac{41}{140} \quad - \quad 25\tfrac{11}{28} \\ &= -11\tfrac{1}{10}. \end{aligned}$$

Oder man addiert zunächst (nach §. 33, 4 d) die Brüche für sich, welche einen kleinern Generalnenner geben.

$$\begin{aligned} \text{Daher } 8\tfrac{13}{20} - 7\tfrac{7}{12} - 17\tfrac{17}{21} + 5\tfrac{9}{14} &= (8\tfrac{13}{20} - 7\tfrac{7}{12}) - (17\tfrac{17}{21} - 5\tfrac{9}{14}) \\ &= 1\tfrac{1}{15} - 12\tfrac{1}{6} = -11\tfrac{1}{10}. \end{aligned}$$

IV. $7-4$ kann ebensowohl als Addition von $+7$ und -4, wie auch als Subtraktion der absoluten Zahl 4 von der absoluten Zahl 7 aufgefafst werden. Ein Fehler kann hierbei nicht entstehen, da man in jedem Falle $+3$ oder 3 erhält.

V. Obgleich nur die Gleichung die mathematische Form der Zahlenlehre (wie der Algebra) ist, so stellt man doch auch die Summanden des bequemeren Rechnens wegen unter einander.

Daher:

$$\begin{array}{r} +\ 7 \\ -11 \\ \hline =-\ 4 \end{array} \quad \text{statt } +7-11=-4.$$

Eben so:

$$\begin{array}{r} -23 \\ +14 \\ \hline =-\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +6 \\ -2 \\ \hline =+4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 5 \\ +29 \\ \hline =+24. \end{array}$$

3. Subtraktion mit entgegengetzten Zahlen.

a. Soll von $7: +3$ subtrahiert werden, so hat man $7-(+3)$ zu schreiben. 8 um -5 vermindert ist $= 8-(-5)$.

Das Minuszeichen ist also Subtraktionszeichen, wenn die darauf folgenden Zahlen mit Richtungszeichen versehen sind.

b. Eine solche Subtraktion verwandelt man stets in eine Addition, indem man die auf das Subtraktionszeichen folgende

Parenthese auflöst, wobei sich die in denselben befindlichen Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandeln (übereinstimmend mit §. 9, 16 und 18). Es ist also:

1. Beispiel.
$7-(+3)=7-3$ (Addition von $+7$ und -3) $=4$.

Beweis.
Rest + Shd. $=7-3+(+3)=7-3+3=7=$ Minuend!

2. Beispiel.
$7-(-3)=7+3$ (Addition von $+7$ und $+3$) $=10$.

Beweis.
Rest + Shd. $=7+3+(-3)=7+3-3=7=$ Minuend!

1. Zusatz. Anstatt also $+3$ zu subtrahieren, kann man -3 addieren, anstatt -3 zu subtrahieren, kann man $+3$ addieren.

Allgemein: Um positive und negative Zahlen zu subtrahieren, kann man sie mit entgegengesetzten Vorzeichen addieren.

2. Zusatz. $8-3$ und $3-8$ sind einander entgegengesetzt, denn ersteres ist $+(8-3)$, letzteres $-8+3=-(8-3)$.

Allgemein: $b-a$ ist der Differenz $a-b$ entgegengesetzt; oder: Vertauscht man in einer Differenz den Minuend mit dem Subtrahend, so erhält man die entgegengesetzte Zahl. [Mithin sind $a \div b$ und $b \div a$ (s. §. 18, Schlufsbemerkung), d. i. $a:b$ und $b:a$, oder $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ entgegengesetzte Zahlen der 2. Stufe; oder: Vertauscht man den Dividend mit dem Divisor, so erhält man entgegengesetzte Zahlen dieser Art, d. i. die reciproken Zahlen.]

Beispiele. Von $6-13$ soll $-11+3-20$ subtrahiert werden:
$=6-13-(-11+3-20)$
$=6-13 \quad +11-3+20$ [somit ist die Subtraktion in Addition verwandelt]
$=21$.

Von $-18+7$ soll $+9-2+31$ subtrahiert werden:
$=-18+7-(+9-2+31)$
$=-18+7 \quad -9+2-31$ (Add.!)
$=-49$.

Von -10 soll $14-41$ subtrahiert werden! Man denke sich: Von -10 soll $+14-41$ subtrahiert werden:
$=-10-(+14-41)$
$=-10 \quad -14+41$
$=17$.

Von 5 soll $18 + 25 - 49$ subtrahiert werden:
$= 5 - (18 + 25 - 49)$
$= 5 - 18 - 25 + 49$ [denn $+ 18$ in der Parenthese gedacht!]
$= 11.$

c. Unmathematische Form.

$\left.\begin{matrix} -12 \\ -7 \end{matrix}\right\}$ Subtraktion bedeutet $-12 - (-7)$.

Nach dem 1. Zusatze des Satzes *b* kann man eine Addition daraus bilden, wenn man den Subtrahend (die untere Zahl) in die entgegengesetzte verwandelt. Daher:

$$= \left\{\begin{matrix} -12 \\ +7 \end{matrix}\right\} \text{Addit.}$$
$$= -5.$$

Eben so $\left.\begin{matrix} 3 \\ -15 \end{matrix}\right\}$ Subtr. $= \left\{\begin{matrix} 3 \\ +15 \end{matrix}\right\}$ Addit.
$= 18.$

$\left.\begin{matrix} -6 \\ -19 \end{matrix}\right\}$ Subtr. $= \left\{\begin{matrix} -6 \\ +19 \end{matrix}\right\}$ Addit.
$= +13.$

$\left.\begin{matrix} 14 \\ 62 \end{matrix}\right\}$ Subtr. $= \left\{\begin{matrix} +14 \\ -62 \end{matrix}\right\}$ Addit.
$= -48.$

d. Vergleicht man $7 - (+3)$ mit $7 - 3$
und $7 - (-3)$ mit $7 + 3$, so ergiebt sich, dafs
$-(+ \ldots .)$ in $-$,
$-(- \ldots .)$ in $+$ übergeht.

Stellt man diese Formen mit denen des Zusatzes in 2, a zusammen, so erhält man:

$$\left.\begin{matrix} +(+ \ldots .) \\ -(- \ldots .) \end{matrix}\right\} \text{wird } +$$

$$\left.\begin{matrix} +(- \ldots .) \\ -(+ \ldots .) \end{matrix}\right\} \text{wird } -$$

oder: 2 aufeinander folgende gleiche Zeichen verwandeln sich in $+$, 2 aufeinander folgende entgegengesetzte Zeichen in $-$.

Beispiele. $5 + (-3) - (-19) + (+4) - (+37)$
$= 5 - 3 + 19 + 4 - 37 = -12.$
$-6 - (-9) + (+19) - (+5) + (-2)$
$= -6 + 9 + 19 - 5 - 2 = 15.$

4. Multiplication mit entgegengesetzten Zahlen.

a. Multiplication zweier Faktoren.

I. $+8 \cdot +3$ [oder $(+8)(+3)$ geschrieben]?

Da die positive Zahl = der absoluten ist, so geht die Aufgabe über in $8 \cdot 3 = 24$, und weil die absolute Zahl = der positiven ist, so erhält man $+24$.

[Hier ist es also nicht nötig, $(0+8) \cdot (0+3)$ zu multiplicieren.]

2 positive Faktoren geben mithin ein positives Produkt.

II. $-8 \cdot +3$ [oder $(-8)(+3)$]?

Für -8 setze man die Differenz $0-8$, für $+3$ die absolute Zahl 3. Daher $(0-8) \cdot 3 = 0 \cdot 3 - 8 \cdot 3$ (s. §. 11, 5)
$= 0 - 24$ (Diff.) $= -24$ (negat. Zahl).

Eine negative Zahl mit einer positiven multipliciert giebt also ein negatives Produkt.

Beispiel. $(-9) \cdot 4 = -36$.

III. $+9 \cdot -4$ [oder $(+9)(-4)$]?

Da die Anordnung der Faktoren beliebig ist, so ist dies $= -4 \cdot +9$ und nach II. $= -36$.

Eine positive Zahl mit einer negativen multipliciert giebt also ein negatives Produkt.

Beispiel. $7(-6) = -42$.

IV. $-8 \cdot -3$ [oder $(-8)(-3)$]?

Setzt man statt des 1. Faktors eine Differenz, so erhält man $(0-8) \cdot (-3)$ [wo 0 und 8 absolute Zahlen, das 1. Minuszeichen aber Subtraktionszeichen] $= 0 \cdot (-3) - [8 \cdot (-3)]$ s. §. 11, 5. Der 1. Teil ist hier $= 0$ und die absolute 8 auch der positiven 8 gleich, daher $= 0 - [(+8)(-3)] = 0 - (-24) = 0 + 24$ (Summe)
$= +24$ (posit. Zahl).

2 negative Faktoren geben also ein positives Produkt.

V. Aus I und IV, sowie II u. III folgt:

Haben beide Faktoren gleiche Zeichen, so ist das Produkt positiv.

Beispiele. $+5 \cdot +7 = +35$; $-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{3} = +\frac{1}{6}$.

Haben die beiden Faktoren verschiedene Zeichen, so ist das Produkt negativ.

Beispiele. $+\frac{3}{5} \cdot -\frac{7}{8} = -\frac{21}{40}$; $-\frac{1}{9} \cdot +\frac{3}{4} = -\frac{1}{12}$.

b. Sind mehr als 2 Faktoren zu multiplicieren, so verwandelt man je 2 negative Faktoren in ein positives Resultat.

1. Beispiel. $\underbrace{(-1)(-2)}(+3)\underbrace{(-4)(-5)}$

$= \quad +2 \quad \cdot \quad +3 \quad \cdot \quad +20 \quad = +120.$

2. Beispiel.

$$\underbrace{(-4)\,(-3)}(-10)\cdot(+2)\cdot\underbrace{(-5)\cdot(-6)}$$
$$= \quad (+12)\cdot(-10)\cdot(+2)\cdot(+30) \quad = (+720)\cdot(-10)$$
$$= -7200.$$

Aus beiden Beispielen folgt die allgemeine Regel (die auch die Sätze unter a überflüssig macht):

> Das Zeichen des Produkts richtet sich nur nach der Anzahl der negativen Faktoren. Ist diese Anzahl $= 0, 2, 4, \ldots$, also **gerade**, so ist das Produkt **positiv**, ist sie $= 1, 3, 5, \ldots$, also **ungerade**, so ist das Produkt **negativ**.

Beispiele.

$(-3)\,(-2)\,(-1)$? 3 negative Faktoren geben ein neg. Produkt, daher $= -3\cdot 2\cdot 1 = -6$.

$(-2)\cdot(-4)\cdot(+10)\cdot(-2)\cdot(-5)$? 4 negat. Faktoren geben ein posit. Produkt, daher $= +2\cdot 4\cdot 10\cdot 2\cdot 5 = 800$.

$2\cdot(-5)\cdot 6\cdot 8$? 1 negat. Faktor $= -$, daher
$= -2\cdot 5\cdot 6\cdot 8 = -480$.

$(+3)\cdot(+4)$? 0 (kein) negativer Faktor $= +$, daher
$= +3\cdot 4 = +12$.

1. Zusatz. Die Glieder einer Summe sind nicht immer einfache Zahlen, vielmehr oft auch Produkte, Quotienten, überhaupt Ausdrücke, die durch höhere Rechnungsarten als Addition und Subtraktion entstanden sind, immer aber sind sie durch $+$ oder $-$ getrennt.

1. Beispiel.

$$1 \underset{S}{-} (-2)\,(-3) \underset{A}{+} (-1)\,(-4)\cdot 5 \underset{A}{+} 7\cdot(-9) \underset{S}{-} 6\cdot(-10)\cdot 2$$

wo A „Additionszeichen", S „Subtraktionszeichen", 7 und 6 absolute Zahlen bedeuten, für die auch positive Zahlen gesetzt werden können. Diese Summe ist daher auch:

$$\text{Hier ist } \underbrace{1}_{1.\text{Glied}}\ \underbrace{-(-2)\,(-3)}_{2.\text{ Glied}}\ \underbrace{+(-1)\,(-4)\,(+5)}_{3.\text{ Glied}}\ \underbrace{+(+7)\,(-9)}_{4.\text{ Glied}}$$
$$\underbrace{-(+6)\,(-10)\,(+2)}_{5.\text{ Glied}}$$

zu unterscheiden, denn die Zahl, welche mit der folgenden nicht mehr durch Multiplication oder Division oder höhere Rechnungsarten verbunden ist, bildet die Grenze des Gliedes. -2 ist daher die Grenze des 2. Gliedes noch nicht, weil diese Zahl noch mit der folgenden (-3) multipliciert ist. Jene Summe ist nun

$$= 1 - (+6) + (+20) + (-63) - (-120)$$
$$= 1 - 6 + 20 - 63 + 120 = 72.$$

Anmerkung. $1 + 7(-9) - 6(-10)2$ [siehe das 1., 4. und 5. Glied des vorstehenden Beispiels] könnte nach dem Satze 1, a auch als Summe von 1, $(+7)(-9)$ und $(-6)(-10)(+2)$ gedacht werden

$$= 1 + (+7)(-9) + (-6)(-10)(+2)$$
$$= 1 + (-63) + (+120) = 1 - 63 + 120,$$ ganz wie oben!

2. Beispiel.

$$\underbrace{(-4)(-5)}_{\text{1. Glied}} \underbrace{+2(-3)}_{\text{2. Glied}} \underbrace{-6(-7)(-10)}_{\text{3. Glied}} \underbrace{-11}_{\text{4. Gl.}} \underbrace{-(-5)\cdot 2}_{\text{5. Glied}}$$
$$= +20 + (-6) - (+420) - 11 - (-10)$$
$$= 20 - 6 - 420 - 11 + 10 = -407.$$

Das vorstehende 3. Glied enthielt 3 Minuszeichen (das Vorzeichen des Produkts inbegriffen) und verwandelte sich in die negative Zahl -420. Das 1. und 5. Glied enthielten 2 Minuszeichen und beide wurden positiv. Hieraus folgt, dafs die allgemeine Regel unter b zugleich mit auf das Vorzeichen ausgedehnt werden kann.

Beispiel.

$$\underbrace{-1}_{\text{1 Min.}} \quad \underbrace{+2(-3)}_{\text{1 Minus}} \underbrace{+5(-6)(-8)(-2)}_{\text{3 Minus}} \underbrace{-4\cdot(+15)\cdot(-9)}_{\text{2 Minus}}$$
$$= -1 \quad -2\cdot 3 \quad -5\cdot 6\cdot 8\cdot 2 \quad +4\cdot 15\cdot 9$$
$$= -1 - 6 - 480 + 540 = 53.$$

2. Zusatz.

Es ist $+8\cdot -1 = -8\cdot 1 = -8$; $-8\cdot -1 = +8\cdot 1 = +8$. Multipliciert man also irgend eine (positive oder negative) Zahl mit -1, so erhält man die entgegengesetzte Zahl. Wäre nun auch der Wert von $a - b + c$ unbekannt, immer müfste

$$(a - b + c)\cdot -1$$

den entgegengesetzten Wert geben. Daher ist auch die Differenz $8 - 3$ dem Werte

$$(8 - 3)\cdot(-1) = 8\cdot(-1) - 3\cdot(-1) \text{ (s. §. 11, 5) } = -8 + 3,$$

d. i. der Differenz $3 - 8$ entgegengesetzt (übereinstimmend mit dem 2. Zusatze in 3, b).

5. Division mit entgegengesetzten Zahlen.

a. Hier gelten dieselben Regeln wie in der Multiplication. Enthält der Quotient nur multiplicierende und dividierende Zahlen. so bestimmt die Anzahl der negativen Zahlen das Zeichen des Quotient. Ist diese Anzahl gerade, so ist der Quotient positiv, ist sie ungerade : negativ.

Beispiele. $\frac{+5}{+6}$ (keine negat. Zahl im Quot.) $= +\frac{5}{6}$

$\frac{-10}{+2}$ (1 negat. Zahl im Quot.) $= -\frac{10}{2} = -5.$

$\frac{+4}{-8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.$

$\frac{-12}{-9}$ (2 negat. Zahlen im Quot.) $= +\frac{12}{9} = +1\frac{1}{3}.$

$\frac{3(-5)}{(-12)(-2)}$ (3 negat. Zahlen!) $= -\frac{3 \cdot 5}{12 \cdot 2} = -\frac{5}{8}.$

Beweis. $\frac{-12}{-9} = +\frac{12}{9}$? Quot. $\times$ Dsr. $= +\frac{12}{9} \cdot -9$

$= -\frac{12}{9} \cdot 9 = -12 =$ Dividend!

In gleicher Weise die übrigen Fälle!

Beispiele.

$$\frac{2}{-6} - \frac{-6}{-8} + \frac{-7}{2} - \frac{1}{-4} + \frac{10}{3}, \text{ d. i.}$$

$$= \frac{+2}{-6} - \frac{-6}{-8} + \frac{-7}{+2} - \frac{+1}{-4} + \frac{+10}{+3}$$

$$= -\frac{2}{6} - \left(+\frac{6}{8}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(+\frac{10}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{3}{4} - 3\tfrac{1}{2} + \frac{1}{4} + 3\tfrac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{2} - 3\tfrac{1}{2} + 3 = -1.$$

$$-4 - \frac{1}{(-2)\cdot 3} + \frac{-5}{(-6)(-10)} - \frac{-20}{(-8)(-15)}$$

$$= -4 - \left(-\frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(-\frac{5}{6\cdot 10}\right) - \left(-\frac{20}{8\cdot 15}\right)$$

$$= -4 + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = -3\tfrac{3}{4}.$$

Zusatz.

Es ist $+8 : -1 = -\frac{8}{1} = -8$; $-8 : -1 = +\frac{8}{1} = +8.$

Dividiert man also irgend eine (positive oder negative) Zahl durch -1, so erhält man den entgegengesetzten Wert dieser Zahl. (Vergleiche den 2. Zusatz in 4, b).

b. Da $-\frac{-6}{-8} = -\left(+\frac{6}{8}\right) = -\frac{6}{8}$, die 3 Minuszeichen der

Aufgabe also ein negatives Resultat geben müssen, so kann man die allgemeine Regel hinsichtlich der Anzahl der Minuszeichen auch auf das Vorzeichen ausdehnen. Daher:

$$\underbrace{-7}_{1\text{ Min.}}\ \underbrace{-\frac{-1}{-4}}_{3\text{ Min.}}\ \underbrace{-\frac{-15}{8}}_{2\text{ Min.}}\ \underbrace{+\frac{2}{-3}}_{1\text{ Min.}}\ \underbrace{+\frac{-10}{12(-5)}}_{2\text{ Min.}}\ \underbrace{+2\cdot\frac{-16}{-5}}_{2\text{ Min.}}$$

$$=-7-\frac{1}{4}+\frac{15}{8}-\frac{2}{3}+\frac{10}{12\cdot 5}+2\cdot\frac{16}{5}$$

$$=-7-\frac{1}{4}+1\tfrac{7}{8}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+6\tfrac{2}{5}=6\tfrac{2}{5}-5\tfrac{7}{8}$$

$$=\frac{21}{40}.$$

c. Enthält der Zähler oder der Nenner Summen oder Differenzen, so sind diese vor der Bestimmung des Zeichens in eine Zahl zu verwandeln.

1. Beispiel.

$$-\frac{2-7}{9-3}=-\frac{-5}{6}\text{ (2 Min.; folglich)}=+\frac{5}{6}.$$

2. Beispiel.

$$\frac{-11+31}{-18+7}=\frac{20}{-11}\text{ (1 Min.; folglich)}=-1\tfrac{9}{11}.$$

3. Beispiel.

$$-4-\frac{-5-7}{15}+\frac{2}{-6+10}$$

$$=-4-\frac{-12}{15}+\frac{2}{+4}$$

$$=-4+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=-2\tfrac{7}{10}.$$

4. Beispiel.

$$1\tfrac{2}{3}\cdot\frac{-6\frac{1}{4}+4\frac{3}{5}}{-5\frac{1}{2}}-\frac{1\frac{1}{2}-4}{-2\frac{1}{3}-1\frac{3}{4}}$$

$$=1\tfrac{2}{3}\cdot\frac{-1\frac{13}{20}}{-5\frac{1}{2}}-\frac{-2\frac{1}{2}}{-4\frac{1}{12}}\text{ (2 Min. und 3 Min., daher)}$$

$$=\frac{1\frac{2}{3}\cdot 1\frac{13}{20}}{5\frac{1}{2}}-\frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{12}}$$

$$=\frac{5\cdot 33\cdot 2}{3\cdot 20\cdot 11}-\frac{5\cdot 12}{2\cdot 49}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{30}{49}=-\frac{11}{98}.$$

5. Beispiel.

$$\frac{-6\frac{1}{2}+8}{3\frac{1}{4}-5}-2\frac{7}{9}-(-4\frac{1}{4})\cdot\frac{-1\frac{2}{3}-3\frac{1}{4}}{-6\frac{1}{3}+5\frac{1}{4}}+3\cdot\frac{-2\frac{1}{2}-3\frac{2}{3}}{(-\frac{1}{2})(-5\frac{1}{3}+8)}$$

$$=\frac{1\frac{1}{2}}{-1\frac{3}{4}}-2\frac{7}{9}-(-4\frac{1}{4})\cdot\frac{-4\frac{11}{12}}{-1\frac{1}{12}}+3\cdot\frac{-6\frac{1}{6}}{(-\frac{1}{2})(+2\frac{2}{3})}$$

1 Min. 1 Min. 4 Min. 2 Min.

$$=-\frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{3}{4}}-2\frac{7}{9}+\frac{4\frac{1}{2}\cdot 4\frac{11}{12}}{1\frac{1}{12}}+\frac{3\cdot 6\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}}$$

$$=-\frac{3\cdot 4}{2\cdot 7}-2\frac{7}{9}+\frac{17\cdot 59\cdot 12}{4\cdot 12\cdot 13}+\frac{3\cdot 37\cdot 2\cdot 3}{6\cdot 1\cdot 8}$$

$$=-\frac{6}{7}-2\frac{7}{9}+\frac{1003}{52}+\frac{111}{8}$$

$$=-\frac{6}{7}-2\frac{7}{9}+19\frac{15}{52}+13\frac{7}{8}$$

$$=-0{,}85714-2{,}77778+19{,}28846+13{,}875 \quad (\text{s. §. } 47, 2)$$

$$=\ 33{,}16346-3{,}63492=29{,}52854.$$

Druck von G. Grumbach in Leipzig.



